

THESE

présentée devant l'UNIVERSITE de NANTES

pour obtenir le grade de

DOCTEUR - INGENIEUR

par

Jacques DESCUSSE

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE MECANIQUE



COMMANDE OPTIMALE DECOUPLEE

Application à la conduite du générateur de vapeur de la Tranche 5 de la
Centrale Thermique de Nantes - Cheviré

Soutenue le 16 mars 1976 devant la Commission d'Examen

M. MEZENCEV Président

M. THOMAS

M. LECRIQUE

M. LE MAITRE

M. SARLAT

} Examineurs

THESE

présentée devant l'UNIVERSITE de NANTES

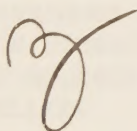
pour obtenir le grade de

DOCTEUR - INGENIEUR

par

Jacques DESCUSSE

ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE MECANIQUE



COMMANDE OPTIMALE DECOUPLEE

Application à la conduite du générateur de vapeur de la Tranche 5 de la
Centrale Thermique de Nantes - Cheviré

Soutenue le 16 mars 1976 devant la Commission d'Examen

M. MEZENCEV	Président
M. THOMAS	} Examineurs
M. LECRIQUE	
M. LE MAITRE	
M. SARLAT	



Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41555012_0019

UNIVERSITE DE NANTES

Président : M. SPARFEL - Pharmacie -

Liste des enseignants des disciplines scientifiques :

Professeurs	M. BRILLOUET	Mathématiques
	M. IBISCH	"
	M. PAUC	"
	M. PETRESCO	"
	M. RAFFIN	"
	M. PIRONNEAU (ENSM)	Mécanique
	M. MEZENCEV (ENSM)	Automatique
	M. AVIGNON	Physique
	M. BOULLLOUD	"
	M. COLLET	"
	M. MINN	"
	M. MOUTON	"
	Melle OFFRET (ENSM)	"
	M. GRAFF	Chimie
	M. MARTIN	"
	M. PIERI	"
	M. QUINIOU	"
	M. ROUXEL	"
	M. WOJTKOWIAK	"
	M. GARRIGUES	Biologie
Professeurs associés	Mme LE DOUARIN	"
	M. LE DOUARIN	"
	M. SELLIER	"
	M. CAVET	Sciences de la Terre
	M. FORESTIER	"
Professeurs sans chaire	M. BRARD (ENSM)	Mécanique
	M. FOUQUES	Mathématiques
	M. LEBORGNE	"
	M. GUEVEL (ENSM)	Hydrodynamique
	M. BARDON Roger	Physique
	M. CAILLER (IUT Nantes)	"
	M. GOUREAUX	"
	M. LASKAR	"
	M. LE NAOUR	"
	M. ROSIER	"
	M. CHABANEL	Chimie
	M. POINTEAU (ENSM)	"
	M. TOURNOUX	"
	M. LE LEC (IUT St-Nazaire)	Génie Chimique
	M. BOUCHY (IUT Nantes)	Métallurgie
	M. GOBIN (ENSM)	"

Professeurs sans chaire (suite)	M. DUPONT	Biologie
	M. SAUDRAY	"
	M. OTTMANN	Sciences de la Terre
Maîtres de Conférences	M. DHOMBRES	Mathématiques
	M. DO (ENSEM)	"
	M. GAPAILLARD	"
	M. GATESOUBE	"
	M. LAMEAU (ENSM)	"
	M. PHAN-THE-LAI	"
	M. VOGEL	"
	M. DUBIGEON (ENSM)	Mécanique
	M. VAUSSY (ENSM)	"
	M. GROVEL (IUT St-Nazaire)	Génie Civil
	M. VILAINE (ENSM)	"
	M. SULMONT (ENSM)	Hydrodynamique
	M. de LARMINAT (IUT Nantes)	Automatique
	M. LE CORRE (ENSM)	"
	M. THOMAS (IUT Nantes)	"
	M. ERCEAU (IUT Nantes)	L.I.A.N.A.
	M. BECLE (IUT St-Nazaire)	Physique
	M. DEVELY (IUT St-Nazaire)	"
	M. LE BIHAN	"
	M. LEROY (IUT Nantes)	"
	M. LE MAITRE R.	"
	M. LONCKE	"
	M. LE MAITRE Félix (ENSM)	Technologie et Tech- niques de Production
	Mme MARTIN	Chimie
	M. AMOURIQ	Biologie
	M. LE BRUN	"
	Mme NICOLAS-PRATT	"
	M. NICOLAS	Sciences de la Terre

Secrétaire Général : M. LERAY

AVANT-PROPOS

La présente thèse a été entreprise au Laboratoire d'Automatique de L'ECOLE NATIONALE SUPERIEURE DE MECANIQUE de NANTES que dirige *Monsieur le* Professeur R. MEZENCEV.

Qu'il trouve ici l'expression de ma profonde reconnaissance pour l'intérêt qu'il n'a cessé de porter à cette étude, ainsi que pour la confiance et les nombreux encouragements qu'il m'a toujours prodigués.

Je ne saurais dire toute ma gratitude à l'initiateur de ce travail, *Monsieur Y. THOMAS*, dont les conseils et les critiques autorisés ont constitué le guide précieux qui m'a permis de mener à bien cette étude.

Je suis très reconnaissant envers *Monsieur J. F. LEMAITRE* du Département des Etudes et Recherches en Automatique de Toulouse, d'avoir bien voulu considérer mon travail avec intérêt et de faire partie de la Commission d'Examen.

Je remercie bien vivement *Monsieur M. LECRIQUE* des Etudes et Recherches E. D. F, avec qui j'ai eu le plaisir de collaborer lors de l'expérience de Cheviré et qui me fait l'honneur de bien vouloir juger cette thèse.

Que mon Collègue et Ami, *Monsieur D. SARLAT*, trouve dans ces quelques lignes l'expression de mes sincères remerciements pour les échanges fructueux que j'ai eus avec lui à maintes reprises. Mon souhait le plus vif est que notre collaboration se prolonge longtemps encore.

Qu'il me soit donné ici l'occasion de remercier tous ceux qui ont collaboré à ce travail à des titres divers, je pense plus particulièrement à mes collègues chercheurs, au personnel technique de laboratoire et, plus spécialement, à *Monsieur A. BERTHONNEAU*, ainsi qu'au personnel du Centre de Calcul Universitaire.

Enfin mes remerciements les plus chaleureux iront à *Mesdames LEMAIRE et POTIRON* et à *Mademoiselle PHILIPPE* qui, bien qu'ayant la tâche ingrate de dactylographier un manuscrit souvent rébarbatif, l'ont cependant toujours fait avec gentillesse.

* * *

*

NOTATIONS GENERALES

- Dans ce mémoire, $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \dots$, représentent des espaces vectoriels construits sur le corps des réels et dont les éléments sont notés $\underline{x}, \underline{y}, \dots$. L'espace nul, le vecteur nul, ... sont notés 0 ; $d(\mathcal{Y})$ est la dimension de $\mathcal{Y}$. Si $\mathcal{M} \subset \mathcal{X}$, $\mathcal{M}^\perp$ désigne le complément orthogonal de $\mathcal{M}$.

- Les applications linéaires et les matrices qui leur correspondent sont définies sur le corps des réels et sont notées par des lettres $A, B, C, \dots$, le même symbole désignant à la fois l'application linéaire et la matrice qui lui est associée.

- Les applications linéaires $A : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$, $B : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{X}$, $C : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ ($\dim \mathcal{X} = n$, $\dim \mathcal{U} = m$, $\dim \mathcal{Y} = p$) sont données et associées au système dynamique linéaire S défini par

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}} &= A \underline{x} + B \underline{u} & \underline{x}_{k+1} &= A \underline{x}_k + B \underline{u}_k \\ &\text{ou} & & \\ \underline{y} &= C \underline{x} & \underline{y}_k &= C \underline{x}_k \end{aligned}$$

- Pour une matrice K , K^T désigne la matrice transposée, $\mathcal{K}$ ou $\mathcal{K}$ désignent l'image de K , c'est-à-dire le sous-espace engendré par les colonnes de K . Deux sous-espaces sont dits indépendants si leur intersection est nulle. La somme de deux sous-espaces, notée $+$, est le sous-espace engendré par l'union de leurs bases respectives. La somme est dite directe et notée $\oplus$ si les deux espaces sont indépendants. Un sous-espace $\mathcal{M}$ de $\mathcal{X}$ est un sous-espace de $\mathcal{X}$ invariant par A , si $A \mathcal{M} \subset \mathcal{M}$.

- Le sous-espace commandable de la paire (A, B) est désigné par $\{A|B\}$

$$\{A|B\} = B + AB + \dots + A^{n-1}B$$

$\{A|B\}$ est par définition le sous-espace de $\mathcal{X}$ de plus grande dimension que la commande $\underline{u}$ peut affecter. Notons que $\{A|B\}$ est un sous-espace de $\mathcal{X}$ invariant par A .

- La matrice unité associée à un espace de dimension n est notée I_n .
 - La transformée en s de la variable x est notée $x(s)$.
 - La transformée en z de séquence $\{x_n\}_0^\infty$ est notée $x(z)$.
 - Le module d'une quantité complexe est noté $| \quad |$.
 - Les références bibliographiques rapportées en fin de chapitre sont notées dans le texte $[\quad]$.
-

S O M M A I R E

	PAGES
<u>INTRODUCTION</u>	1
 <u>CHAPITRE 1</u> : SYNTHÈSE D'UN SYSTÈME DÉCOUPLÉ. RÉSULTATS THÉORIQUES FONDAMENTAUX	5
1 - Introduction	6
2 - Résultats fondamentaux de la théorie de découplage	8
2.1 - Notations et hypothèses de base	8
2.2 - Résultats fondamentaux	10
3 - Stabilité, placement arbitraire des pôles et découplage	16
4 - Récapitulatif des résultats énoncés aux paragraphes 2 et 3	20
5 - Démonstrations des théorèmes fondamentaux	23
6 - Conclusion	44
	.../...

	PAGES
CHAPITRE 2 : COMMANDE DES SOUS-SYSTÈMES DÉCOUPLÉS : CAS CONTINU	46
1 - Introduction	47
2 - Rappels sur la théorie de la commande optimale quadratique	48
2.1 - Position du problème. Equivalence avec un problème plus classique	48
2.2 - Solution du problème II	50
3 - Rappel sur le problème inverse de la commande optimale quadratique	50
4 - Commande optimale d'un système découplé	53
5 - Détermination du bouclage optimal $\underline{\hat{k}}_i^T$ pour un sous-système $(\hat{A}_i, \hat{b}_i, \hat{c}_i^T)$	61
5.1 - Rappels de résultats établis au chapitre 1	61
5.2 - Compensation des sous-systèmes $(\hat{A}_i, \hat{b}_i, \hat{c}_i^T)$	62
5.2.1 - Compensation d'un système composé d'intégrateurs purs en cascade	64
5.2.2 - Compensation d'un sous-système avec numérateur	68
6 - Conclusion	71
Appendice	73

	PAGES
<u>CHAPITRE 3 : COMMANDE DES SOUS-SYSTÈMES DÉCOUPLÉS :</u> CAS DISCRET	75
1 - Introduction	76
2 - Rappels sur la théorie de la commande optimale quadratique	77
2.1 - Position du problème. Equivalence avec un problème plus classique	77
2.2 - Solution du problème II	78
3 - Problème inverse de la commande optimale quadratique	78
3.1 - Définition du "gain de boucle" et de la "différence de retour"	79
3.2 - Condition nécessaire d'optimalité pour une loi de commande donnée K	79
3.3 - Cas particulier des systèmes monovariables	82
3.4 - Solution du problème inverse de la com- mande optimale pour un système mono- variable	86
4 - Commande optimale d'un système découplé	89
5 - Détermination du bouclage optimal $\hat{\underline{k}}_i^T$ pour un sous-système $(\hat{\underline{A}}_i, \hat{\underline{b}}_i, \hat{\underline{c}}_i^T)$	93
5.1 - Rappels de résultats établis au chapitre 1	93
5.2 - Compensation des sous-systèmes $(\hat{\underline{A}}_i, \hat{\underline{b}}_i, \hat{\underline{c}}_i^T)$	94

	PAGES
5.2.1 - Compensation d'un système composé exclusivement de retards purs en cascade	97
5.2.1.1 - <i>Solution optimale</i>	97
5.2.1.2 - <i>Utilisation d'un modèle continu équivalent</i>	99
5.2.2 - Compensation d'un système avec numérateur dynamique	104
6 - Conclusion	105
Appendice I	108
Appendice II	109
 <u>CHAPITRE 4 : RÉSULTATS NUMÉRIQUES ET SIMULATIONS</u>	 113
1 - Introduction	114
2 - Découplage sans compensation dynamique	114
3 - Découplage avec compensation dynamique	118
4 - Exemples de réglage de sous-systèmes découplés discrets	122
4.1 - <i>Le sous-système est composé uniquement de retards purs en cascade</i>	122
4.1.1 - Le pas d'échantillonnage est supposé faible	124
4.1.2 - Le pas d'échantillonnage est supposé quelconque	125

	PAGES
4.2 - Le sous-système comporte un numérateur dynamique	126
5 - Conclusion	130
 <u>CHAPITRE 5</u> : RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX OBTENUS EN CENTRALE THERMIQUE E. D. F	 132
1 - Introduction	133
2 - Description de l'installation	133
3 - Définition du modèle mathématique	137
4 - Mise en place de la commande. Elimination du statisme	142
5 - Résultats expérimentaux obtenus sur site	147
5.1 - Fonctionnement en télé-réglage	148
5.2 - Essais en grandes transitoires	153
5.3 - Essais indiciels	153
5.4 - Fonctionnement sur "incident"	158
6 - Conclusion	160
 <u>CONCLUSION</u>	 162

	PAGES
<u>ANNEXE 1</u> : PROGRAMME DE CALCUL : LISTING ET EXEMPLE D'APPLICATION	165
<u>ANNEXE 2</u> : COURBES UNIVERSELLES PERMETTANT DE CHOISIR LE TEMPS DE RÉPONSE ET LE DÉPASSEMENT INDICIELS	188

° °
°

- INTRODUCTION -

A l'heure actuelle, dans le cas des systèmes monovariables (monoentrée-monosortie), on dispose, pour réaliser la synthèse d'un système de commande, d'outils dont l'efficacité n'est plus à démontrer (méthodes algébriques optimales, techniques fréquentielles, lieu de racines, ...). Il en va tout autrement pour les systèmes multivariables (multientrées-multisorties), pour lesquels on ne disposait, du moins jusqu'à un passé relativement récent, que de moyens empiriques fondés essentiellement sur l'extrapolation des techniques précédentes, c'est-à-dire permettant de traiter séparément chaque boucle comme un système monovisible indépendant des autres. Il est inutile d'insister sur les inconvénients d'une telle méthode qui reste aléatoire quant aux résultats, du fait des couplages plus ou moins importants qui existent entre les chaînes : en effet, les différentes régulations locales réagissent les unes sur les autres par l'intermédiaire des interactions internes du processus et on ne peut affirmer que la commande obtenue est globalement satisfaisante ou même qu'elle assure la stabilité du système [1]. La synthèse d'un système de commande multivariable nécessite donc la prise en compte de toutes les interactions, et ne peut être par conséquent réalisée qu'avec l'aide de méthodes appropriées.

De telles méthodes multivariables ont été développées avec succès sur le plan théorique, durant les deux dernières décennies, dans le domaine temporel (espace d'état) comme dans le domaine fréquentiel [1]. On peut citer notamment la commande modale, l'optimisation quadratique et les techniques fréquentielles multivariables. Cependant, du point de vue d'un utilisateur industriel, ces méthodes ne présentent malheureusement pas, à l'heure actuelle, une souplesse d'utilisation suffisante. Ceci provient essentiellement du fait qu'elles supposent que les performances souhaitées pour les systèmes bouclés soient exprimées en termes théoriques, du type spectre de pôles, optimum dynamique, marges de phase généralisées et non, ce qui serait plus réaliste et moins restrictif, dans un langage proche de celui de l'utilisateur, c'est-à-dire en termes de temps de réponse, amortissement, dépassement, écart de régulation moyen.

La conversion des performances, libellées ainsi, en termes plus théoriques et directement assimilables pour les théories précitées, n'est pas immédiate et requiert généralement de nombreuses simulations graphiques. Par ailleurs, ces méthodes ne permettent pas facilement, dans leur stricte application, un réajustement en ligne, souvent souhaitable, des paramètres de régula-

tion, comme l'utilisateur le fait volontiers avec les régulateurs classiques du type PID, pour les chaînes monovariabiles.

Pour tenter de pallier ces inconvénients, nous avons utilisé, à l'occasion d'une expérience sur processus réel, une méthode faisant appel aux techniques du "découplage".

Dans le cadre général de la théorie de la commande multivariable, une attention considérable a été accordée aux concepts de non-interaction [2]. Dans cette optique, on cherche le plus souvent à compenser le processus de telle sorte que chaque entrée (c'est-à-dire généralement une consigne) affecte seulement une sortie. Bien que pour certaines applications, le découplage constitue en lui-même la performance désirée, il est considéré le plus souvent comme un moyen de simplifier le système de commande. En effet, la non-interaction étant obtenue, le système multivariable se transforme en un ensemble de systèmes monovariabiles entièrement découplés qui peuvent être traités plus simplement, soit par des méthodes classiques, du type algébrique ou fréquentielles, soit par des méthodes temporelles telles que la commande modale ou l'optimisation quadratique qui posent beaucoup moins de problèmes sur le plan pratique dès lors qu'il s'agit de systèmes monovariabiles. De plus, le réglage peut être fait chaîne par chaîne sans que l'on ait à modifier les autres boucles, ce qui permet d'envisager a priori un réglage en ligne relativement aisé des paramètres de régulation.

La théorie de la commande non interactive peut être développée, soit en utilisant les transformées, c'est-à-dire le concept de matrice de transfert, qui ne recèle que les parties commandables et observables du modèle, soit en utilisant les techniques de l'espace d'état qui en conservent une description complète. Nous avons donc choisi cette dernière solution, afin d'éviter certaines difficultés qui peuvent apparaître sous forme d'instabilités cachées au niveau du système découplé [3]. De nombreux articles ayant déjà été publiés sur ce sujet, nous nous sommes contentés, dans ce mémoire, d'en effectuer, pour le lecteur, une synthèse aussi complète et compréhensible que possible en précisant un certain nombre de points théoriques délicats : nous avons notamment étudié dans le détail les causes d'instabilité cachées, mentionnées précédemment, et envisagé les moyens que l'on peut apporter pour y remédier.

Ce type de commande, utilisé conjointement avec l'optimisation quadratique au niveau des sous-systèmes découplés, a permis en définitive de mettre en oeuvre sur un processus réel un algorithme de régulation numérique fournissant les performances dynamiques requises et modifiables en ligne à volonté par l'utilisateur. Cet aspect "*interactif*" entre l'utilisateur et le

processus est d'ailleurs à notre avis fondamental puisqu'il a très nettement facilité la phase de mise au point du système de régulation.

D'une manière générale, l'élaboration du système de commande se fera en deux étapes de la façon suivante :

- Dans une première étape, on découple le processus à l'aide d'une première loi de commande, dont la détermination est exposée en détail au chapitre 1, dans lequel nous avons rassemblé les principaux résultats qu'il est nécessaire de connaître à propos de la théorie du découplage.

- Dans une seconde étape, on détermine la loi de commande qu'il faut appliquer à chaque sous-système découplé pour que celui-ci ait en boucle fermée des performances indicielles données sous forme d'un temps de réponse et d'un dépassement, qui sont des notions classiques et familières à tout utilisateur. Cette opération pose en général peu de problèmes puisqu'on a maintenant affaire à des systèmes monovariables et elle peut être effectuée assez simplement à l'aide d'une commande modale ou optimale, sauf dans certains cas où nous verrons que le recours à des techniques plus classiques est préférable.

A ce stade, il est nécessaire de faire une distinction entre le cas des systèmes continus et celui des systèmes discrets. Bien que l'on ait le plus souvent l'habitude de raisonner sur des systèmes continus, il nous a paru nécessaire d'accorder une égale importance aux systèmes discrets, pour plusieurs raisons : d'une part, certains résultats valables dans le cas continu ne peuvent être extrapolés directement au cas discret, d'autre part, si on s'oriente vers une situation de commande numérique, il est logique d'utiliser d'emblée un modèle discret, d'autant plus que les méthodes modernes d'identification pour systèmes multivariables aboutissent en général au modèle discret. Ces deux cas seront donc traités séparément, les systèmes continus au chapitre 2 et les systèmes discrets au chapitre 3.

Les trois premiers chapitres étant essentiellement théoriques, nous rapporterons au chapitre 4 quelques exemples destinés à illustrer le bon fonctionnement des algorithmes de commande qui en sont issus. Le chapitre 5 sera consacré à la conduite en temps réel d'un processus industriel en l'occurrence la chaîne de surchauffe - désurchauffe de la Tranche 5 (250 MW) de la Centrale Thermique de Nantes-Cheviré. L'examen des résultats obtenus sur site lors de cette application permettra finalement de valider l'algorithme de commande que nous allons aborder maintenant d'un point de vue théorique.

- BIBLIOGRAPHIE -

- [1] A.G.J. MAC FARLANE "A survey of some recent results in linear
multivariable feedback theory".
Automatica, Vol. 8, n° 4, pp. 455-492, July 1972.

- [2] A.S. MORSE "Status of noninteracting control"
W.M. WONHAM IEEE Trans. Aut. Cont., AC 16, n° 6, December 1971.

- [3] A. FOSSARD "Commande des systèmes multidimensionnels"
Dunod Editeur, Paris 1972.

CHAPITRE 1

SYNTHÈSE D'UN SYSTÈME DÉCOUPLÉ :

RÉSULTATS THÉORIQUES FONDAMENTAUX

° °

°

- 1 - Introduction
- 2 - Résultats fondamentaux
- 3 - Stabilité et placement arbitraire des pôles d'un système découplé
- 4 - Diagramme récapitulatif
- 5 - Justification mathématique des théorèmes énoncés aux § 2 et 3
- 6 - Conclusion

Résumé :

On aborde dans ce chapitre un cas particulier de la théorie du découplage : celui des systèmes dynamiques linéaires et stationnaires, décrits par des équations différentielles ou récurrentes et où le nombre de sorties scalaires est égal au nombre d'entrées scalaires. Les résultats théoriques fondamentaux sont énoncés sous forme de théorèmes, démontrés uniquement dans le cas continu.

1 - INTRODUCTION

Dans un système multivariable, chaque entrée affecte en général plusieurs sorties (fig. 1-a). Dans le cas où le système peut être représenté valablement par un modèle linéaire stationnaire tel que

$$\begin{aligned}\dot{\underline{x}} &= A \underline{x} + B \underline{u} \\ \underline{y} &= C \underline{x}\end{aligned}\tag{1}$$

et par conséquent par un opérateur linéaire (par exemple la matrice de transfert), et si le nombre d'entrées est égal au nombre de sorties, (hypothèse que nous retiendrons par la suite) les éléments non diagonaux et non nuls de cet opérateur représentent les termes de couplage par rapport aux entrées. Lorsque ces termes sont nuls, le système est dit découplé ou non interactif vis à vis des entrées.

Le concept de non interaction est donc intimement lié au caractère diagonal d'un opérateur linéaire. Découpler un système équivaut alors à diagonaliser l'opérateur linéaire qui le caractérise. Notons que la solution à ce problème (quand elle existe) ne pourra être obtenue à l'aide d'une simple transformation linéaire, telle qu'un changement de base par exemple, ou même par un simple bouclage sur l'état, la structure de cet opérateur étant invariante sous ces deux actions.

Cette remarque conduit à formuler le problème de la non-interaction de la façon suivante :

"Pour un système (1) donné, est-il possible de trouver un opérateur linéaire et un nouveau vecteur de commande $\underline{v}$ tels qu'une entrée v_i affecte seulement une sortie y_i et qu'une sortie y_i ne soit affectée que par une entrée v_i ?".

Le système résultant est alors schématisé par la figure 1.b.

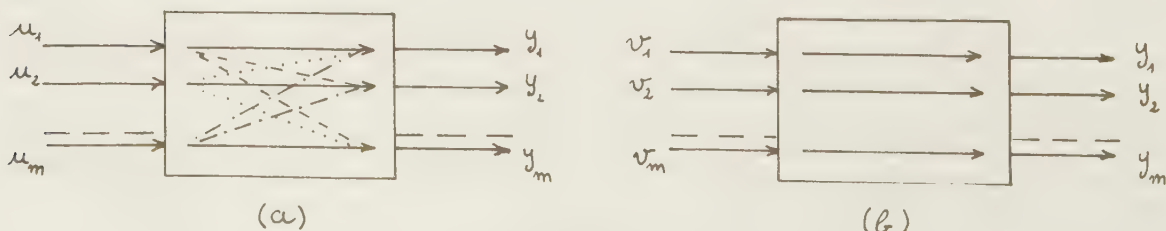


Figure 1

Cet objectif peut être réalisé par un bouclage, dit statique, tel que :

$$\underline{u} = F \underline{x} + G \underline{v} \quad \text{avec} \quad \dim \underline{v} = \dim \underline{u} \quad (2)$$

tel que le système

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}} &= (A + BF) \underline{x} + B G \underline{v} \\ \underline{y} &= C \underline{x} \end{aligned} \quad (3)$$

satisfasse au schéma de la figure 1.b.

La résolution de ce problème soulève les questions suivantes :

- a) Le découplage est-il toujours possible ? Sinon à quelles conditions l'est-il ?
- b) Dans l'affirmative, quelle est la classe $\mathcal{F}$ des lois de commande (F, G) qui répondent à la question ?
- c) Quelle est la classe des systèmes découplés ?
- d) Quelle est la correspondance qui existe entre les éléments des deux classes précédentes ?
- e) Que peut-on dire de la stabilité des systèmes découplés et plus généralement de la configuration de leurs pôles ?

Ces cinq questions constituent l'essentiel du problème du découplage tel que nous l'avons posé précédemment et que nous allons aborder maintenant d'un point de vue mathématique.

Le plan de ce chapitre est organisé de la façon suivante :

Au paragraphe 2, nous citons les théorèmes fondamentaux nécessaires pour effectuer la synthèse d'un système découplé, autrement dit les réponses aux questions (a), (b), (c) et (d). Les démonstrations souvent longues de ces théorèmes y sont volontairement omises et reportées au paragraphe 5, où l'on justifie également leur extension au cas discret. Le paragraphe 3 traite de certains problèmes que pose la mise en oeuvre pratique d'un système découplé, tels que la stabilité et le placement arbitraire des pôles de ce dernier (question e). Les résultats des paragraphes précédents sont résumés au paragraphe 4 sous forme d'un tableau qui constitue en lui-même l'organigramme

d'un programme de calcul.

2 - RESULTATS FONDAMENTAUX DE LA THEORIE DU DECOUPLAGE

2.1 - Notations et hypothèses de base

Considérons le système S , complètement observable, défini par les équations :

$$\begin{aligned}\dot{\underline{x}} &= A \underline{x} + B \underline{u} \\ \underline{y} &= C \underline{x}\end{aligned}\quad \dim \underline{u} = \dim \underline{y} = m \quad (1)$$

et la loi de commande

$$\underline{u} = F \underline{x} + G \underline{v} \quad \dim \underline{v} = \dim \underline{u} \quad (2)$$

Le système en boucle fermée $S(F,G)$ est alors défini par :

$$\begin{aligned}\dot{\underline{x}} &= (A + BF) \underline{x} + B G \underline{v} \\ \underline{y} &= C \underline{x}\end{aligned} \quad (3)$$

On notera $H(s)$ la matrice de transfert associée au système S

$$H(s) = C(sI_n - A)^{-1}B \quad (4)$$

De la même façon, nous noterons

$$H(s,F,G) = C(sI_n - A - BF)^{-1}BG \quad (5)$$

la matrice de transfert associée au système $S(F,G)$.

Pour éviter toute trivialité, nous supposerons que :

Hypothèse 1 :

- Les matrices B et C sont de rang maximum.
- La matrice G est régulière.

Cette dernière condition est nécessaire pour que la matrice BG , équivalente de B pour le système (3), soit elle-même de rang maximum.

Remarque : Il est évident qu'une condition nécessaire pour que S puisse être découplé par une loi du type (2) est que sa sortie y soit commandable.

Si ce n'est pas le cas :

- ou bien le nombre de sorties indépendantes est inférieur à m (cas qui ne peut se produire puisque C est de rang maximum).
- Ou bien certaines sorties ne sont en aucune façon affectées par la commande u.

Afin d'éviter ce cas trivial, nous supposons que :

Hypothèse 2 :

Le système S est à sortie complètement commandable, ce qui équivaut à dire que la matrice :

$$R = [CB \mid CAB \mid \dots \mid CA^{n-1}B]$$

est de rang m.

Dans ces conditions, nous utiliserons dans la suite la définition :

Définition :

Le système S est découplé si et seulement si la matrice de transfert $H(s)$ est diagonale et non singulière.

Dans le cas général, A, B, C étant quelconques, cette condition n'est pas réalisée. Le problème se pose alors de la façon suivante :

"Existe-t-il au moins une paire (F,G), telle que $H(s,F,G)$ réponde à la définition précédente" (questions a et b).

2.2 - Résultats fondamentaux

Théorème 1 : Existence d'une loi de découplage [1].

Soit D la matrice $m \times m$

$$D = \begin{bmatrix} \underline{C}_1^T & A^{d_1} B \\ \vdots & \vdots \\ \underline{C}_m^T & A^{d_m} B \end{bmatrix} \quad \text{où} \quad \underline{C}_i^T \text{ désigne le } i^{\text{ème}} \text{ vecteur ligne de } C$$

$$d_i \triangleq \begin{cases} \min j : \underline{C}_i^T A^j B \neq 0 \quad j \in [0, n-1] & , i \in [1, m] \\ n-1 & \text{si } \underline{C}_i^T A^j B = 0 \quad \forall j \end{cases}$$

Il existe une paire (F, G) qui découple le système S si et seulement si D est non singulière.

De plus, une solution particulière est donnée par :

$$F^* = -D^{-1}A^* \quad \text{avec} \quad A^* = \begin{bmatrix} \underline{C}_1^T & A^{d_1+1} \\ \vdots & \vdots \\ \underline{C}_m^T & A^{d_m+1} \end{bmatrix}$$

$$G^* = D^{-1} \Lambda$$

$$\Lambda = \text{diag}[\lambda_i] \quad \lambda_i \neq 0, \quad i \in [1, m]$$

Remarque : Si la matrice D n'a pas de ligne nulle, mais si $\det D = 0$, le système est à "couplage faible". Dans ce cas, une solution non interactive peut néanmoins être trouvée à l'aide d'un compensateur dynamique [7], [8], [9], ...

Corollaire 1 :

Si le système S satisfait la condition " D régulière", alors :

$$H(s, -D^{-1}A^*, D^{-1}\Lambda) = \text{diag} \left[\frac{\lambda_i}{s^{d_i+1}} \right]$$

A cause de la forme particulière de sa matrice de transfert nous dirons que le système $S(-D^{-1}A^*, D^{-1}\Lambda)$ est un "système d'intégrateurs découplés", noté plus simplement ID.

Pour plus de commodité, nous noterons dorénavant le système $S(-D^{-1}A^*, D^{-1}\Lambda)$ par $\bar{S}$ et nous écrirons (3) sous la forme

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}} &= \bar{A} \underline{x} + \bar{B} \underline{v} & \bar{A} &= A - BD^{-1} A^* \\ \underline{y} &= \bar{C} \underline{x} & \bar{B} &= BD^{-1} B \\ & & \bar{C} &= C \end{aligned} \quad \text{avec} \quad (6)$$

Corollaire 2 :

Pour un système ID, tel que (6), les matrices $\bar{D}$ et $\bar{A}^*$ valent respectivement

$$\bar{D} = A \quad \text{et} \quad \bar{A}^* = 0$$

En résumé, le théorème 1 exprime que la non singularité de D est une condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe au moins un élément de la classe $\mathcal{F}$ qui découple S ; et le corollaire 1 met en évidence la structure particulière du système découplé $\bar{S}$.

Cependant, si la matrice de transfert $\bar{H}$ a une forme particulièrement intéressante, il n'en est pas tout à fait de même pour les équations d'état (6) de $\bar{S}$. Par conséquent, pour répondre plus complètement aux questions posées par le découplage, il est nécessaire d'analyser plus profondément la structure interne des systèmes $\bar{S}$ et d'examiner en particulier leurs propriétés de commandabilité et d'observabilité, ce qui permettra finalement de mettre $\bar{S}$ sous une forme canonique, dite "canonique découplée", notée plus simplement CD.

Définition d'un système CD

Un système $\hat{S} = (\hat{A}, \hat{B}, \hat{C})$ est CD, si les conditions suivantes sont satisfaites :

1) Les matrices $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$ sont partitionnées de la façon suivante :

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} \hat{A}_1 & \dots & \dots & \dots & 0 & \hat{A}_1^O \\ 0 & \ddots & \hat{A}_2 & \dots & \dots & \hat{A}_2^O \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & C & \hat{A}_m & 0 \\ \hat{A}_1^C & \dots & \dots & \hat{A}_{m-1}^C & \hat{A}_m^C & \hat{A}_{m+1} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \hat{A}_{m+2} \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} \dim \hat{A}_i &= p_i \times p_i \\ \dim \hat{A}_i^C &= p_{m+1} \times p_i \\ \dim \hat{A}_i^O &= p_i \times p_{m+2} \end{aligned} \quad (7)$$

$$B = \begin{bmatrix} \underline{r}_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \hat{\underline{b}}_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \hat{\underline{b}}_m \\ \hat{\underline{b}}_1^c & \hat{\underline{b}}_2^c & \dots & \hat{\underline{b}}_m^c \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

$$\dim \hat{\underline{b}}_i = p_i \times 1$$

$$\dim \hat{\underline{b}}_i^c = p_{m+1} \times 1$$
(8)

$$\left[\begin{array}{cccc|c|c} \hat{\underline{c}}_1^T & 0 & \dots & 0 & 0 & \hat{\underline{c}}_1^{T_o} \\ 0 & \hat{\underline{c}}_2^T & \dots & 0 & 0 & \hat{\underline{c}}_2^{T_o} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & \hat{\underline{c}}_m^T & 0 & \hat{\underline{c}}_m^{T_o} \end{array} \right]$$

$$\dim \hat{\underline{c}}_i^T = 1 \times p_i$$

$$\dim \hat{\underline{c}}_i^{T_o} = 1 \times p_{m+2}$$
(9)

Les entiers p_i sont tels que :

$$p_i \geq d_i + 1 \quad i \in [1, m] \quad , \quad \sum_{i=1}^m p_i = n$$

2) Pour $i \in [1, m]$, les matrices $\hat{A}_i$, $\hat{\underline{b}}_i$, $\hat{\underline{c}}_i^T$ ont la forme suivante :

$$\hat{A}_i = \left[\begin{array}{c|c} \theta_i & (0) \\ \hline \psi_i & \hat{\underline{\phi}}_i \end{array} \right]$$

$$\dim \theta_i = (d_i + 1) \times (d_i + 1)$$

$$\dim \hat{\underline{\phi}}_i^T = 1 \times r_i$$

$$\dim \psi_i = r_i \times (d_i + 1)$$

$$\dim \hat{\underline{\phi}}_i = r_i \times r_i$$

$$\text{avec } r_i = p_i - (d_i + 1)$$

où θ_i est une matrice compagnon du "type à variables de phase".

$$\hat{\underline{b}}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \lambda_i \\ \underline{\beta}_i \end{bmatrix} \quad \dim \underline{\beta}_i = r_i \times 1 \quad (11)$$

$$\hat{\underline{c}}_i^T = [1 \quad 0 \quad \dots \quad 0] \quad (12)$$

3) Pour $i \in [1, m]$ la paire $\hat{A}_i, \hat{\underline{b}}_i$ est complètement commandable.

Remarque : L'état $\hat{\underline{x}}$ associé à la forme CD, définie précédemment, est partitionné de la façon suivante :

$$\hat{\underline{x}} = \begin{bmatrix} \hat{x}_{-1} \\ \vdots \\ \hat{x}_{-m} \\ \hat{x}_{-m+1} \\ \hat{x}_{-m+2} \end{bmatrix} \quad \dim \hat{x}_i = p_i \times 1 \quad i \in [1, m+2]$$

Il est clair sous cette forme, que $\hat{x}_{-m+1}$ et $\hat{x}_{-m+2}$ correspondent respectivement à des modes inobservables (mais commandables) et à des modes non commandables (mais observables) du système $\hat{S}$.

On peut établir une similitude entre les systèmes $\bar{S}$ et $\hat{S}$ à l'aide des théorèmes 2 et 3 qui suivent et qui concernent les propriétés de commandabilité et d'observabilité de ces derniers :

Nous avons jusqu'à présent supposé la commandabilité de la sortie du système S . Or, le fait que le triplet (A, B, C) soit complètement commandable n'implique en aucune façon que la paire (A, B) et par conséquent la paire $(\bar{A}, \bar{B})$ soient complètement commandables (si la paire (A, B) est complètement commandable, la paire $(\bar{A}, \bar{B})$ l'est aussi car la commandabilité est une propriété invariante sous l'action d'une loi de commande (F, G) , [3]). Le système $\bar{S}$ peut donc être non complètement commandable ⁽¹⁾. Dans ce cas :

(1) Ce cas peut notamment se produire lorsque des perturbations sont incluses dans le vecteur d'état.

Théorème 2 :

Si la paire $(\bar{A}, \bar{B})$ n'est pas complètement commandable, alors il existe une transformation linéaire régulière définie par $\tilde{x} = T_1 x$ telle que le système $\bar{S}$ prenne la forme

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= T_1 \bar{A} T_1^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} \tilde{A}_c & \hat{A}^0 \\ \hline 0 & \hat{A}_{m+2} \end{array} \right] & \tilde{B} &= \left[\begin{array}{c} \tilde{B}_c \\ \hline (0) \end{array} \right] = T_1 \bar{B} \\ \tilde{C} &= \bar{C} T_1^{-1} = \left[\begin{array}{c|c} \tilde{C}_c & \hat{C}^0 \end{array} \right] \end{aligned}$$

De plus

Corollaire 3 :

Le système $\tilde{S}_c = (\tilde{A}_c, \tilde{B}_c, \tilde{C}_c)$ est un système ID complètement commandable.

En analysant les propriétés de commandabilité et d'observabilité du système $\tilde{S}_c$, on montre que :

Théorème 3 :

Tout système ID à état complètement commandable est semblable à un système CD par un changement de base défini par $\hat{x}_c = Q \tilde{x}_c$ pour lequel $p_{m+2} = 0$ et

$$\hat{A}_c = \left[\begin{array}{c|c} \begin{array}{cc} 0 & I_{d_i} \\ 0 & 0 \end{array} & \begin{array}{c} \hat{A}^0 \\ \hline \end{array} \\ \hline \begin{array}{cc} \psi_i & \end{array} & \begin{array}{c} \hat{C}^0 \\ \hline \end{array} \end{array} \right] \quad (13)$$

En résumé, tout système ID $\bar{S}$ est semblable à un système CD par un changement de base défini par $\hat{x} = T_2 \cdot T_1 x$ avec

$$T_2 = \left[\begin{array}{c|c} Q & (0) \\ \hline (0) & I_{p_{m+2}} \end{array} \right]$$

où T_1 et Q ont été mentionnées précédemment, et pour lequel les matrices $\hat{A}_i$ $i \in [1, m]$ ont la forme particulière (13).

Remarque : Dans le cas très fréquent où la paire $(\bar{A}, \bar{B})$ est complètement commandable ($p_{m+2} = 0$) $T_1 = I_n$ et le théorème 3 se suffit à lui-même.

Le comportement dynamique des systèmes $\bar{S}$ et $\hat{S}$ est en général inacceptable puisqu'on obtient, après bouclage par (F^*, G^*) , une intégration multiple.

entre $\underline{y}$ et $\underline{v}$. Il est donc nécessaire de compenser le système une nouvelle fois pour avoir des dynamiques satisfaisantes.

Les théorèmes suivants permettent de résoudre ce problème de compensation pour les systèmes CD $\hat{S}$. On peut ensuite remonter au système initial S à l'aide des théorèmes 2 et 3.

Théorème 4 :

Supposons que le système $\hat{S}$ soit CD, alors la loi de commande $(\hat{K}, \hat{G})$ découple ce système si et seulement si

$$\hat{K} = \begin{bmatrix} \hat{k}_1^T & & & & & \\ & \hat{k}_2^T & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \hat{k}_m^T & & \\ (0) & & & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (0) & & & & & \\ & (0) & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & (0) & & \\ & & & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{k}_1^{\circ T} \\ \hat{k}_2^{\circ T} \\ \vdots \\ \hat{k}_m^{\circ T} \end{bmatrix} \quad \text{où} \quad \begin{aligned} \dim \hat{k}_i^T &= 1 \times p_i \\ \dim \hat{k}_i^{\circ T} &= 1 \times p_{m+2} \end{aligned}$$

et $\hat{G} = \text{diag}[\gamma_i] \quad i \in [1, m] \quad \gamma_i \neq 0$

Théorème 5 :

Supposons que le système $\hat{S}$ soit CD et semblable à un système ID, et qu'on choisisse une loi de commande (K, G) du type précédent alors

1) La matrice de transfert $\hat{H}(s, \hat{K}, \hat{G})$ est diagonale et d'éléments

$$\hat{h}_i(s, \hat{K}, \hat{G}) = \frac{\alpha_i(s) \cdot \lambda_i \gamma_i}{\phi_i(s, \underline{\sigma}_i^T)} \quad i \in [1, m]$$

où

$$\begin{aligned} \alpha_i(s) &= \det(sI_{n_i} - \Phi_i) = s^{n_i} + \alpha_{i1}s^{n_i-1} + \dots + \alpha_{in_i} \\ \phi_i(s, \underline{\sigma}_i^T) &= s^{p_i} + \sigma_{i1}s^{p_i-1} + \dots + \sigma_{ip_i} \end{aligned}$$

Les σ_{ij} sont les coefficients du polynôme caractéristique du $i^{\text{ème}}$ sous-système en boucle fermée.

2) $\hat{k}_i^T = (\underline{\sigma}_i^T - \underline{\pi}_i^T) \cdot v_i, \quad i \in [1, m]$

avec $\underline{\sigma}_i^T = [\sigma_{ij}] \quad j \in [1, p_i]$

$$\underline{\pi}_i^T = [0 \dots 0 \quad \alpha_{in_i} \dots \alpha_{i1}]$$

et où V_i est une matrice régulière qui ne dépend que de $(\hat{A}_i, \hat{b}_i)$.

$$3) \det(sI_n - \hat{A}) = \alpha_{m+1}(s) \cdot \alpha_{m+2}(s) \prod_{i=1}^m \phi(s, \hat{\sigma}_i^T)$$

avec

$$\alpha_i(s) = \det(sI_{p_i} - \hat{A}_i) \quad i = (m+1, m+2)$$

Les cinq théorèmes précédents permettent de résoudre sur le plan théorique le problème du découplage (questions a, b, c et d). Ils ne fournissent malheureusement aucune indication sur la réalisabilité du système découplé (fig. 2) et il est par conséquent nécessaire d'aller au-delà, en examinant plus spécialement le problème de la stabilité de ce dernier (question e).

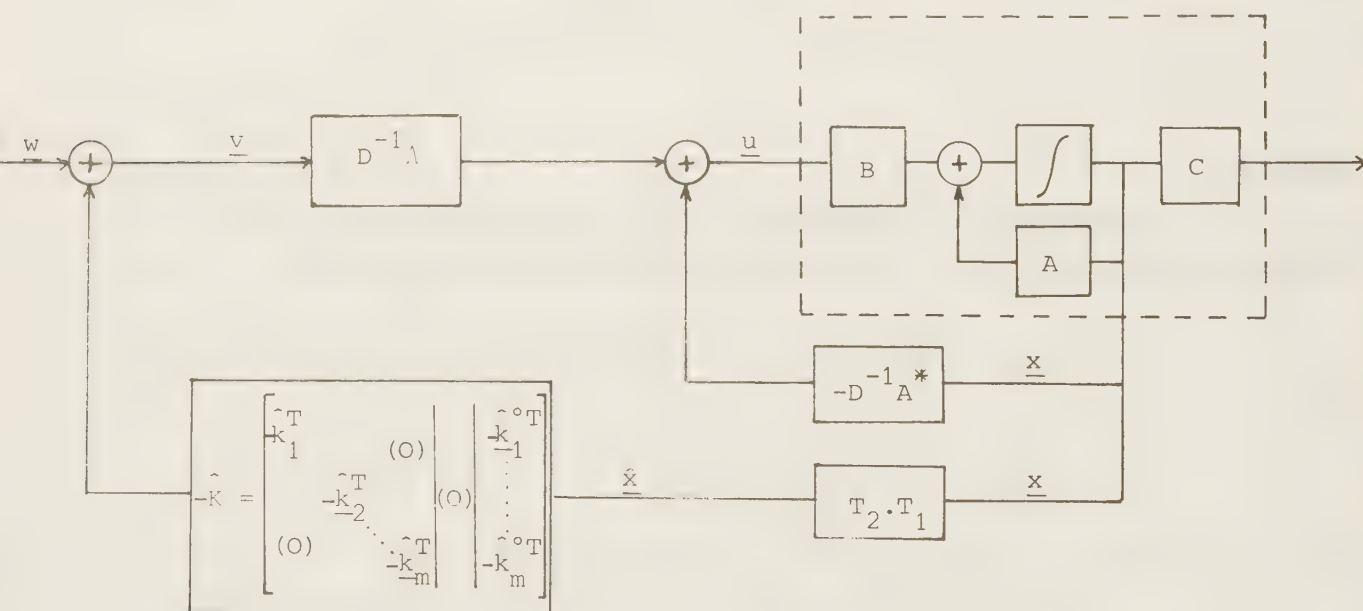


Figure 2

Diagramme général d'un système découplé

3 - STABILITE, PLACEMENT ARBITRAIRE DES POLES ET DECOUPLAGE

Le fait qu'un système S puisse être découplé par une loi de commande (F, G) est insuffisant pour qu'on puisse réellement appliquer cette commande au système. Ceci n'est effectivement réalisable que dans l'hypothèse où le système bouclé résultant est stable.

Le problème de la stabilité d'un système découplé est intimement lié à ses propriétés de commandabilité et d'observabilité.

- En ce qui concerne la commandabilité, nous avons affaire à un cas trivial. En effet $S(F,G)$ n'est complètement commandable que si S l'est [3]. Par conséquent, si le système en boucle ouverte S n'est pas stabilisable, $S(F,G)$ ne le sera pas non plus. Ceci se vérifie aisément sur la forme CD, où la partie $\hat{A}_{m+2}$ n'est en aucune façon affectée par une commande du type (14). Pour que le découplage soit possible, il faut donc que, lorsque $p_{m+2} \neq 0$, le polynome $\alpha_{m+2}(s)$ soit stable.

- Le problème de l'observabilité⁽¹⁾ est plus complexe car cette propriété n'est pas invariante sous l'action d'une commande en boucle fermée. Plus précisément, elle dépend du choix de la matrice F : sous l'action d'une telle commande un système S complètement observable peut rester complètement observable ou devenir partiellement inobservable. Le problème se pose donc de la façon suivante : "Est-il toujours possible de choisir une loi de commande (F,G) telle que le système $S(F,G)$ soit complètement observable ?".

Pour répondre à cette question, nous allons considérer la forme CD et pour simplifier nous supposons que l'état est complètement commandable ($p_{m+2} = 0$). Trois cas peuvent être envisagés.

$$a) \quad \sum_{i=1}^m p_i = n \quad \text{et} \quad p_i = d_i + 1 \quad i \in [1, m]$$

Dans ce cas, la matrice $\hat{A}$ se réduit à :

$$\hat{A} = \text{diag} [\hat{A}_i] \quad \text{avec} \quad \hat{A}_i = \theta_i$$

Alors pour toute paire (F,G) qui découple S la complète observabilité de $S(F,G)$ est assurée.

Remarque :

Si $m + \sum_{i=1}^m d_i = n$ les fonctions de transfert $\hat{h}_i(s, F, G)$ n'ont pas de termes dynamiques au numérateur.

$$b) \quad \sum_{i=1}^m p_i = n \quad \text{mais il existe au moins un entier } k \in [1, m]$$

$$\text{tel que } p_k > d_{k+1}$$

(1) Ce problème a été étudié de façon systématique dans [4].

La fonction de transfert correspondante $\hat{h}_k(s, F, G)$ est de la forme (15) (théorème 5) et le numérateur peut être simplifié partiellement ou complètement avec le dénominateur. Le système étant par hypothèse commandable cette simplification ne peut être due qu'à des états devenus inobservables par un choix particulier de F .

Réciproquement, dans le cas b), il est possible de choisir au moins un bouclage (F, G) tel que le système découplé soit complètement observable.

$$c) \sum_{i=1}^m p_i = p < n \quad (p_{m+1} \neq 0)$$

Dans ce cas le nombre maximum d'états observables est p quel que soit le choix du bouclage (F, G) : en effet, la partie $\hat{A}_{m+1}$ de $\hat{A}$ relative aux états inobservables $\hat{x}_{m+1}$ n'est affectée en aucune façon par une loi du type (14).

Par conséquent si $p < n$, il n'est pas possible de trouver une paire (F, G) qui rende le système découplé complètement observable.

Conclusion :

D'un point de vue pratique nous pouvons dire que seul le cas c) peut poser des problèmes de stabilité : en effet, si $p_{m+1} \neq 0$, il est impossible de fixer arbitrairement les pôles (bien que le système soit complètement commandable) et respecter le découplage, $\hat{A}_{m+1}$ étant invariante sous l'action d'une loi de commande (14). Pour que le découplage soit réalisable, il faut donc, lorsque $p_{m+1} \neq 0$, que le polynôme $\alpha_{m+1}(s)$ soit stable.

Cette contrainte est donc particulièrement gênante lorsque les pôles fixés (relatifs à $\hat{A}_{m+1}$) sont "mal placés" et a fortiori instables. Néanmoins, il est toujours possible de l'éliminer en ajoutant des dynamiques supplémentaires au système initial :

Théorème 6 :

Si (A, B) est complètement commandable et si (A, B, C) peut être découplé par bouclage sur l'état, il est toujours possible d'adjoindre au système initial un compensateur dynamique d'ordre k de telle sorte que le découplage et le placement arbitraire de $n + k$ pôles puissent être réalisés simultanément.

Le compensateur dynamique utilisé est de la forme :

$$\dot{\underline{z}} = \underline{L} \underline{x} + \underline{K} \underline{z} \quad \text{avec } \underline{z} = \underline{x} / 1$$

où $\underline{L}$ et $\underline{K}$ sont des matrices de dimensions appropriées. Le système augmenté s'écrit alors :

$$\begin{bmatrix} \dot{\underline{x}} \\ \dot{\underline{z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{A} & \underline{O} \\ \underline{L} & \underline{K} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x} \\ \underline{z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{B} \\ \underline{O} \end{bmatrix} \underline{u} = \underline{A}' \begin{bmatrix} \underline{x} \\ \underline{z} \end{bmatrix} + \underline{B}' \underline{u}$$

$$\underline{y} = [\underline{C} \quad \underline{O}] \begin{bmatrix} \underline{x} \\ \underline{z} \end{bmatrix} = \underline{C}' \begin{bmatrix} \underline{x} \\ \underline{z} \end{bmatrix}$$

et peut être découplé si les conditions du théorème 1 sont satisfaites. Or, on vérifie aisément que

$$\underline{D}' = \underline{D}$$

$$\underline{A}'^* = [\underline{A}^* \quad \underline{O}]$$

Le système S' satisfait donc la condition " $\underline{D}'$ régulière" et par conséquent en utilisant la loi de commande

$$\underline{u} = -\underline{D}'^{-1} \underline{A}'^* \begin{bmatrix} \underline{x} \\ \underline{z} \end{bmatrix} + \underline{D}'^{-1} \underline{A} \underline{v}$$

on obtient le système découplé

$$\underline{\bar{A}}' = \begin{bmatrix} \underline{\bar{A}} & \underline{O} \\ \underline{L} & \underline{K} \end{bmatrix} \quad \underline{\bar{B}}' = \begin{bmatrix} \underline{\bar{B}} \\ \underline{O} \end{bmatrix} \quad \underline{\bar{C}}' = [\underline{\bar{C}} \quad \underline{O}]$$

Les matrices $\underline{L}$ et $\underline{K}$, jusqu'à présent inconnues, sont alors déterminées à partir de $\underline{\bar{S}}^{(1)}$ de telle sorte que pour le système $\hat{S}'$, la condition $p'_{m+1} = 0$ soit réalisée. En d'autres termes, l'adjonction d'un compensateur dynamique permet de se ramener si nécessaire au cas b) précédent.

Le système découplé $S(F,G)$ est alors schématisé avec son compensateur dynamique suivant le diagramme de la fig. 3.

(1) Si l'état n'est pas complètement commandable, les matrices $\underline{L}$ et $\underline{K}$ sont déterminées à partir de $\hat{\underline{S}}_c$.

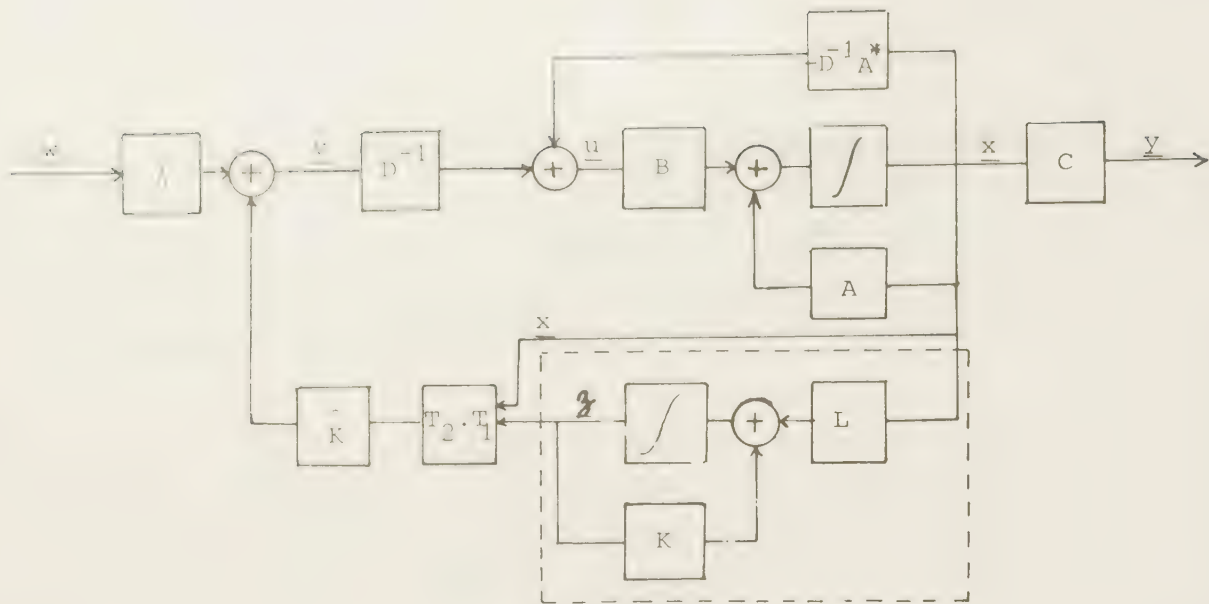


Figure 3

Diagramme général d'un système découplé avec compensation dynamique

4 - RECAPITULATIF DES RESULTATS ENONCES AUX PARAGRAPHES 2 et 3

Le problème du découplage, tel qu'il a été défini auparavant, et sa résolution peuvent être résumés sous forme synthétique de la façon suivante :

* Pour tout système $S = (A, B, C)$ ayant un nombre égal d'entrées et de sorties scalaires, il existe une matrice D $m \times m$, déterminée de façon unique à partir de S , et telle que $S(F, G)$ peut être découplé si et seulement si cette matrice est non singulière (question a).

* Si D est non singulière, on détermine à partir de S les grandeurs supplémentaires suivantes :

- une $m \times m$ matrice A^* , calculée à partir de A, B, C (cf. théorème 1) ;
- des entiers $p_i > 0$, $i \in [1, m+2]$, et $r_i > 0$ ($r_i < p_i$ si $i \in [1, m]$, $r_i = p_i$ si $i > m$ (cf. définition d'un système CD) ($p_{m+2} \neq 0$ si et seulement si S n'est pas complètement commandable)
- deux matrices régulières $n \times n$, T_1 et T_2 (si S est complètement commandable $T_1 = I_n$) ; (cf. théorèmes 2 et 3)
- des polynômes $\alpha_i(s) = s^{r_i} + \alpha_{i1} s^{r_i-1} + \dots + \alpha_{i1} s^{r_i-1}$, $i \in [1, m+2]$ si $r_i = 0$ $\alpha_i(s) = 1$ (cf. théorème 5) ;

- des matrices régulières V_i de dimensions $p_i \times p_i$ $i \in [1, m]$ (cf. théorème 5).

* La classe des paires (F, G) qui découple (S) (question b) est donnée par

$$F = -D^{-1}A^* - \hat{K}T_2T_1, \quad G = D^{-1}\Lambda \quad (\text{cf. théorème 4})$$

où

$$\hat{K} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \hat{k}_1^T & & & & & \hat{k}_0^T \\ & (O) & & & & \vdots \\ & \hat{k}_2^T & & & & \vdots \\ & \vdots & & & & \vdots \\ & & (O) & & & \vdots \\ & & \vdots & & & \hat{k}_m^T \\ & (O) & & & & \vdots \\ & & \hat{k}_m^T & & & \vdots \end{array} \right] \quad \left. \begin{array}{l} m \text{ et } \Lambda = \text{diag}(\lambda_i) \\ \lambda_i \text{ arbitraire } \neq 0 \end{array} \right\}$$

$$\text{où } \hat{k}_i^T = (\sigma_i^T - \pi_i^T) \quad \forall i \quad i \in [1, m] \quad \dim \hat{k}_i^T = 1 \times p_i$$

$$\dim V_i = p_i \times p_i$$

$$\text{avec } \sigma_i^T = [\sigma_{ij}] \quad j \in [1, p_i]$$

$$\pi_i^T = [0 \dots 0 \alpha_{i_{r_i}} \dots \alpha_{i_1}]$$

$$\text{et } \hat{k}_i^T \text{ vecteurs arbitraires.}$$

* La classe des systèmes découplés (question c) est celle des systèmes $CD \hat{S}$.

* Les éléments diagonaux de la matrice de transfert $H(s, F, G)$ (question d) sont :

$$h_i(s, F, G) = \frac{\lambda_i \alpha_i(s)}{t_i(s, \sigma_i^T)}$$

$$\text{avec } \phi_i(s, \sigma_i^T) = s^{p_i} + \sigma_{i_1} s^{p_i-1} + \dots + \sigma_{ip_i}$$

où λ_i et σ_{ij} sont des scalaires arbitraires. Une fois qu'ils sont choisis, (F, G) est donc entièrement déterminée, et de façon unique si $\hat{S}$ est complètement commandable ($p_{m+2} = 0$).

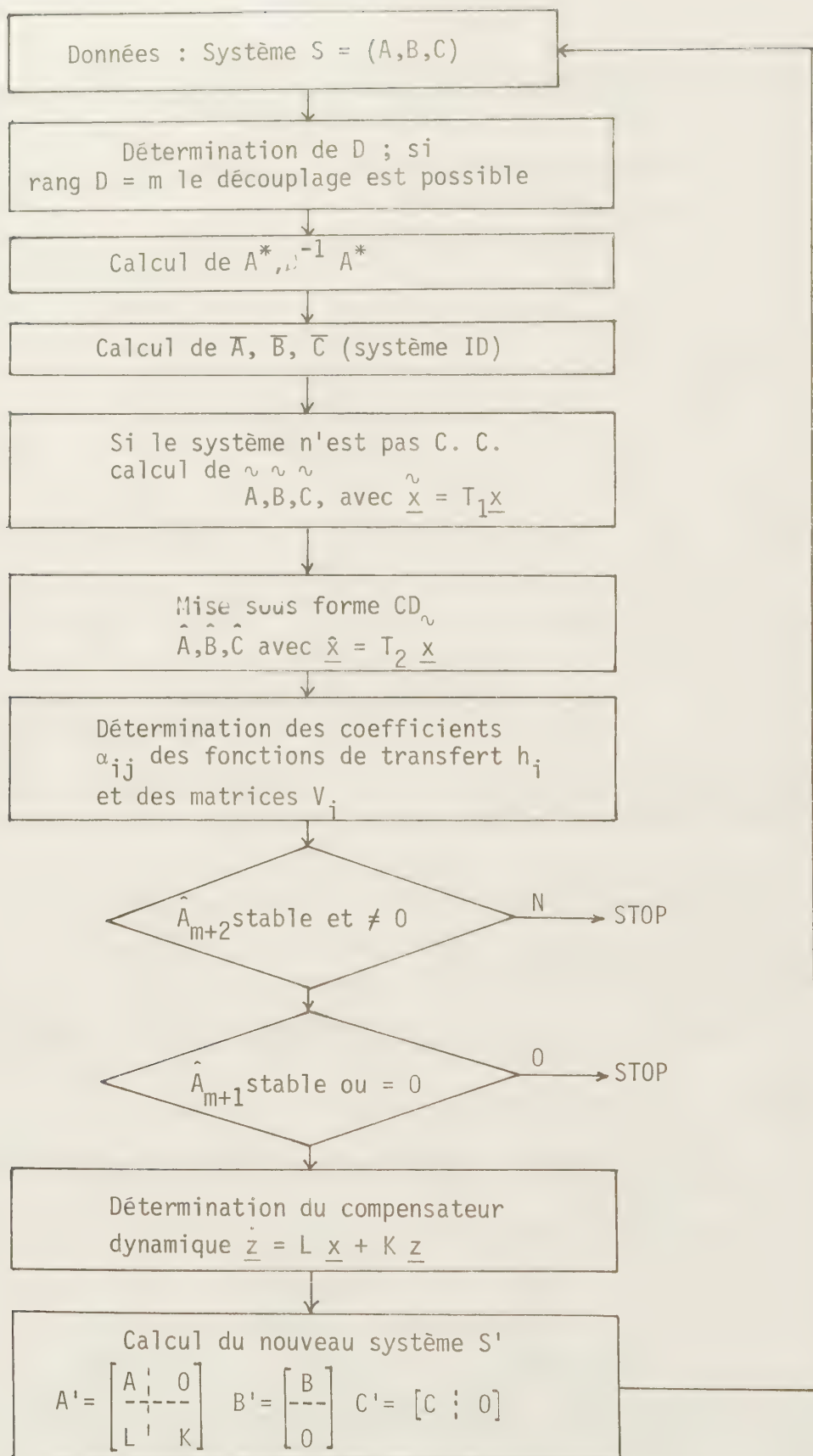


Tableau 1

* L'équation caractéristique du système en boucle fermée (question e) est :

$$\det(sI_n - A - BF) = \alpha_{m+1}(s) \cdot \alpha_{m+2}(s) \cdot \prod_{i=1}^m \phi_i(s, \sigma_{-i}^T)$$

Par conséquent, on peut placer arbitrairement tous les pôles du système découplé si $p_{m+1} = p_{m+2} = 0$, étant donné que dans le cas contraire $\alpha_{m+1}(s)$ et $\alpha_{m+2}(s)$ sont invariants par K . De plus, le découplage est physiquement réalisable si $\alpha_{m+1}(s)$ et $\alpha_{m+2}(s)$ sont des polynômes stables.

Si $\alpha_{m+1}(s)$ est instable, on utilise alors un compensateur dynamique :

$$\dot{\underline{z}} = L \underline{x} + K \underline{z}$$

Tous ces résultats sont par ailleurs résumés au tableau 1 qui constitue en lui-même l'organigramme d'un programme FORTRAN permettant d'effectuer sur machine les opérations nécessaires à la synthèse d'un système découplé.

5 - DEMONSTRATIONS DES THEOREMES FONDAMENTAUX

5.1 - Théorème 1⁽¹⁾

La démonstration de ce théorème nécessite quelques résultats préliminaires.

Lemme 1 : Toute matrice de transfert telle que (4) ou (5) peut se mettre sous la forme :

$$H(s) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{C A^j B}{s^{j+1}}$$

Ce résultat est immédiat si l'on remarque que $(sI - A)^{-1}$ est la transformée de Laplace de e^{At} .

Dans ce développement de $H(s)$ apparaissent des termes CA^jB qui jouent un rôle fondamental pour la commandabilité de la sortie du système S . D'après l'hypothèse 2, celle-ci est complètement commandable, c'est-à-dire que la matrice $R = [CB | CAB | \dots | CA^{n-1}B]$ est de rang m . Alors :

Lemme 2 : Si la matrice R est de rang m , alors pour tout $i \in [1, m]$, il existe au moins un entier $j \in [0, n-1]$ tel que $\underline{C}_i^T A^j B \neq 0$ où $\underline{C}_i^T$ désigne le $i^{\text{ème}}$ vecteur ligne de C .

(1) Ce théorème fut établi initialement par Falb et Wolowich [1], puis par E. G. Gilbert [2], mais en utilisant des approches différentes.

En effet, s'il n'en était pas ainsi, la matrice R serait au plus de rang m-1, ce qui est contraire à l'hypothèse 2.

Nous poserons par définition :

$$d_i \equiv \begin{cases} \min j : \underline{C}_i^T A^j B \neq 0, j \in [0, n-1] \\ j = n - 1 \text{ si } \underline{C}_i^T A^j B = 0 \quad \forall j \end{cases}$$

Compte tenu de la définition des d_i , on peut alors écrire :

$$\begin{aligned} \underline{C}_i^T (A + BF) &= \underline{C}_i^T A \\ \underline{C}_i^T (A + BF)^2 &= \underline{C}_i^T A^2 \\ \underline{C}_i^T (A + BF)^{d_i} &= \underline{C}_i^T A^{d_i} \\ \underline{C}_i^T (A + BF)^{d_i+1} &= \underline{C}_i^T A^{d_i} (A + BF) \\ \underline{C}_i^T (A + BF)^{n-1} &= \underline{C}_i^T A^{d_i} (A + BF)^{n - d_i - 1} \end{aligned}$$

Relations qui peuvent être résumées sous la forme :

$$\underline{C}_i^T (A + BF)^k = \begin{cases} \underline{C}_i^T A^k & k \in [0, d_i] \\ \underline{C}_i^T A^{d_i} (A + BF)^{k - d_i} & k \in [d_i+1, n-1] \end{cases} \quad (17)$$

$$i \in [1, m]$$

Compte tenu de (17) et de la définition des d_i , nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} \underline{C}_i^T (A + BF)^k B G &= 0 \quad k \in [0, d_i - 1] \\ \underline{C}_i^T (A + BF)^{d_i} B G &= \underline{C}_i^T A^{d_i} B G \neq 0 \end{aligned}$$

ce qui implique que :

Lemme 3 :

Les nombres d_i sont des F invariants ⁽¹⁾ et ne dépendent par conséquent que de S .

Rappelons que le système S est découplé si et seulement si la matrice de transfert $H(s)$ est diagonale et non singulière et par conséquent s'il en est de même des matrices $C A^j B \quad \forall j$. Dans le cas général, A, B, C étant quelconques, cette condition n'est pas réalisée. Cherchons alors s'il existe au moins une paire (F, G) , telle que $H(s, F, G)$ réponde à la définition précédente.

Exprimons $H(s, F, G)$ suivant (16) :

$$H(s, F, G) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{C(A + BF)^j B G}{s^{j+1}}$$

Dire que les matrices $C(A + BF)^j B G$ sont diagonales équivaut à dire que les vecteurs lignes $\underline{C}_i^T (A + BF)^j B G$ ont un seul élément non nul à la i ème colonne.

Compte tenu de (18), la i ème ligne de $H(s, F, G)$ s'écrit :

$$h_i(s, F, G) = \sum_{j=d_i}^{\infty} \frac{\underline{C}_i^T (A + BF)^j B G}{s^{j+1}}$$

ou

$$h_i(s, F, G) = \frac{\underline{C}_i^T A^{d_i} B G}{s^{d_i+1}} + \sum_{j=d_i+1}^{\infty} \frac{\underline{C}_i^T (A + BF)^j B G}{s^{j+1}} \quad (19)$$

Considérons le premier terme de (19) et prenons pour G la forme particulière suivante :

$$G = G^* = \begin{bmatrix} \underline{D}_1^T \\ \underline{D}_2^T \\ \vdots \\ \underline{D}_m^T \end{bmatrix}^{-1} \Lambda \quad \text{avec} \quad \underline{D}_i^T \triangleq \underline{C}_i^T A^{d_i} B \quad \text{et} \quad \Lambda = \text{diag}(\lambda_i) \\ i \in [1, m], \quad \lambda_i \neq 0$$

alors

$$h_i(s, F, G) = \frac{\lambda_i \underline{I}_m^i}{s^{d_i+1}} + \sum_{j=d_i+1}^{\infty} \frac{\underline{C}_i^T (A + BF)^j B G}{s^{j+1}} \quad (20)$$

(1) On appelle F - invariant de S toute propriété de $S(F, G)$ qui pour une matrice G fixée ne dépend pas de F .

$$\text{avec } I_m^i = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & \overset{i}{\downarrow} 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix}$$

Le terme $\frac{\lambda_i I_m^i}{d_i + 1}$ a un seul terme non nul à la $i^{\text{ème}}$ colonne.

Tous les autres termes du développement dépendent de F sauf le premier. Pour que le découplage existe, il suffit donc de voir si on peut les annuler par un choix judicieux de F. Si une telle condition existe, elle constituera un élément particulier de la classe $\mathcal{F}$.

Tous ces termes sont de la forme :

$$\underline{C}_{-i}^T (A + BF)^{k+d_i} BG \quad \text{pour } k > 0$$

D'après (17)

$$\underline{C}_{-i}^T (A + BF)^{d_i+1} = \underline{C}_{-i}^T A^{d_i+1} + \underline{D}_{-i}^T F$$

Choisissons

$$F = -D^{-1} \begin{bmatrix} \dots \dots \dots \dots \\ \dots \dots \dots \dots \\ \underline{C}_{-i}^T A^{d_i+1} \\ \dots \dots \dots \dots \\ \dots \dots \dots \dots \end{bmatrix} \quad i^{\text{ème}} \text{ ligne}$$

$$\text{Alors } \underline{C}_{-i}^T (A + BF)^{d_i+1} = 0$$

et par conséquent :

$$\underline{C}_{-i}^T (A + BF)^{d_i+k} BG = 0 \quad \text{pour } k > 0 \quad (21)$$

Pour que ceci soit vrai $\forall i \in [1, m]$, il suffit donc de prendre

$$F = F^* = -D^{-1} A^* \quad \text{avec } A^* \triangleq \begin{bmatrix} \underline{C}_{-1}^T A^{d_1+1} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \underline{C}_{-m}^T A^{d_m+1} \end{bmatrix}$$

Le système $S(F^*, G^*)$ est alors découplé.

D'après ce qui précède, il suffit donc que la matrice D construite précédemment soit non singulière, pour que S puisse être découplé. Montrons que cette condition est également nécessaire.

Supposons que la paire (F,G) découple S , alors $H(s,F,G)$ est diagonale et non singulière. Supposons que :

$$\underline{C}_i^T A^j B = 0 \quad \forall j$$

alors $h_i(s,F,G) = 0$, ce qui contredit l'affirmation précédente. Donc :

$$\underline{C}_i^T A^j B \neq 0 \quad \text{pour } j \in [0, n-1] \text{ et } i \in [1, m]$$

La matrice D construite précédemment ne peut donc avoir de vecteurs lignes nuls. D'autre part, pour que le système soit découplé, il faut que le premier terme du développement de $h_i(s,F,G)$, qui lui ne dépend pas de F , soit un vecteur ligne avec un seul élément non nul : le $i^{\text{ème}}$. Donc

$$\underline{D}_i^T G = \lambda_i \underline{I}_m^i \quad i \in [1, m]$$

et par conséquent

$$DG = \Lambda \text{ avec } \Lambda = \text{diag}(\lambda_i), \lambda_i \neq 0 \quad (22)$$

G étant régulière, D l'est aussi.

Le corollaire 1 se déduit immédiatement de (20) et du choix particulier que nous avons fait pour F .

Le corollaire 2 découle immédiatement de (21) et (22) et du lemme 3.

5.2 - Théorème 2 :

Rappelons que la paire $(\bar{A}, \bar{B})$ est complètement commandable si la matrice

$$P = [\bar{B} \mid \bar{A} \bar{B} \mid \dots \mid \bar{A}^{n-1} \bar{B}]$$

est de rang n , ce qui équivaut à dire que $\mathcal{P} = \mathcal{X}$, où $\mathcal{P}$ désigne le sous-espace commandable de plus grande dimension contenu dans $\mathcal{X}$.

Supposons que $\dim \mathcal{P} < n$, alors $\mathcal{X}$ peut être décomposé de la façon suivante :

$$\mathcal{X} = \mathcal{P} \oplus \mathcal{P}^\perp \quad \dim \mathcal{P} = n_c$$

Notons que $\mathcal{P}$ est un sous-espace de $\mathcal{X}$ invariant par $\bar{A}$.

(Cette propriété est évidente d'après la définition de $\mathcal{P}$).

Construisons une base de $\mathcal{P}$, par exemple en prenant n_c vecteurs colonnes linéairement indépendants dans $\mathcal{P}$. Soit P_1 la matrice composée de ces n_c vecteurs ; pour avoir une base de $\mathcal{X}$ on doit y adjoindre $n - n_c$ vecteurs linéairement indépendants. Pour cela, il suffit de prendre une base $\mathcal{P}^\perp$: une telle base est constituée par les vecteurs orthogonaux à ceux de P_1 . La matrice correspondante est notée $P_1^\perp$.

L'espace d'état $\mathcal{X}$ est invariant par $\bar{A}$ donc

$$\begin{aligned} \bar{A} \mathcal{X} &\subset \mathcal{X} \\ \bar{A} (\mathcal{P} \oplus \mathcal{P}^\perp) &\subset \mathcal{P} \oplus \mathcal{P}^\perp \end{aligned}$$

ce qui signifie qu'il existe $\hat{A}$ telle que

$$\bar{A} [P_1 \mid P_1^\perp] = [P_1 \mid P_1^\perp] \hat{A}$$

Etant donné que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}^\perp$ sont indépendants et que $\mathcal{P}$ est invariant par $\bar{A}$, la forme de $\hat{A}$ s'en déduit immédiatement.

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} \hat{A}_c & \hat{A}_o \\ (0) & \hat{A}_{m+2} \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} \dim \hat{A}_c &= n_c \times n_c \\ \dim \hat{A}_o &= n_c \times p_{m+2} \\ \dim \hat{A}_{m+2} &= p_{m+2} \times p_{m+2} \\ n_c &= p - p_{m+2} \end{aligned}$$

(la notation ci-dessus est utilisée pour être ultérieurement compatible avec la forme CD).

D'autre part $\mathcal{B} \subset \mathcal{X}$

ou $\mathcal{B} \subset \mathcal{P} \oplus \mathcal{P}^\perp$

Donc il existe B telle que

$$B = [P_1 \mid P_1^\perp] \hat{B}$$

Or, $\mathcal{B} \subset \mathcal{P}$, d'où la forme de B .

$$B = \left[\begin{array}{c} \sim \\ B_C \\ \hline (0) \end{array} \right]_{p_{n+2}} \quad \dim B_C = n_C \times m$$

Par conséquent en utilisant la transformation linéaire et régulière définie par $\tilde{x} = T_1 \underline{x}$ avec $T_1 = [P_1 \mid P_1^\perp]^{-1}$ on obtient la forme canonique du théorème 2.

Le corollaire 3 est évident d'après la forme de $\tilde{A}$ et $\tilde{B}$, qui montre que

$$\left\{ \begin{array}{c} \sim \\ \tilde{A} \end{array} \mid \begin{array}{c} \sim \\ \tilde{B} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \sim \\ \tilde{A}_C \end{array} \mid \begin{array}{c} \sim \\ \tilde{B}_C \end{array} \right\} = P$$

et par conséquent

$$\text{rang} \left[\begin{array}{c} \sim \\ \tilde{B}_C \end{array} \quad \begin{array}{c} \sim \\ \tilde{A}_C \end{array} \quad \begin{array}{c} \sim \\ \tilde{B}_C \end{array} \quad \dots \quad \begin{array}{c} \sim \\ \tilde{A}_C^{n_C-1} \end{array} \quad \begin{array}{c} \sim \\ \tilde{B}_C \end{array} \right] = n_C$$

D'autre part, les conditions du corollaire 2 sont vérifiées pour S . En effet, un simple calcul montre que :

$$\tilde{D} = D = D_C = A$$

$$\tilde{A}^* = A^* = 0 \text{ et } \tilde{A}_C^* = 0$$

$$\tilde{d}_i = d_i = d_{iC} \quad i \in [1, m]$$

Le théorème 2 permet donc d'effectuer une décomposition de l'espace d'état X en la somme de deux sous-espaces indépendants, celui des états commandables P et celui des états non commandables $P^\perp$, et de mettre ainsi le système S sous la forme canonique S .

5.3 - Théorème 3 [2] :

Le théorème 3 découle des propriétés d'observabilité et de commandabilité du système ID $\tilde{S}_C$ et d'une décomposition adéquate du sous-espace P .

Dans tout ce qui suit nous considérerons donc le système ID complètement commandable.

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{x}}_C &= \tilde{A}_C \tilde{x}_C + \tilde{B}_C \underline{v} \\ \tilde{y} &= \tilde{C}_C \tilde{x}_C \end{aligned} \quad (23)$$

et pour simplifier l'écriture nous laisserons tomber l'indice c et les tildas.

5.3.1 - Décomposition du sous-espace $\mathcal{P}$

Le système (23) est par hypothèse découplé, c'est-à-dire que :

- la sortie y_i n'est influencée que par la commande v_i ;
- la commande v_i n'influence que la sortie y_i .

Mathématiquement ceci s'exprime par :

$$\begin{aligned} \underline{C}_{-i}^T [A^k \underline{B}_j] &= 0 \quad j \neq i \quad i \in [1, m] \quad \underline{B}_{-i}: i^{\text{ème}} \text{ vecteur colonne de } B. \\ \underline{C}_{-i}^T [A^k \underline{B}_i] &= 0 \quad k \in [0, n-1] \end{aligned} \quad (24)$$

Nous noterons $R_i \triangleq [\underline{B}_{-i} \quad A \underline{B}_{-i} \quad \dots \quad A^{n-1} \underline{B}_{-i}]$. Par définition, le sous-espace $\mathcal{R}_i$ (engendré par les colonnes de cette matrice) est le sous-espace des états atteignables à partir de l'origine par v_i . On notera de la même façon $R_i^* \triangleq [R_j]_{j \neq i} \quad j \in [1, m]$. Le sous-espace $\mathcal{R}_i^*$ désigne alors le sous-espace des états atteignables à partir de l'origine par $v_j \quad j \neq i \quad j \in [1, m]$. Les conditions (24) s'expriment alors par :

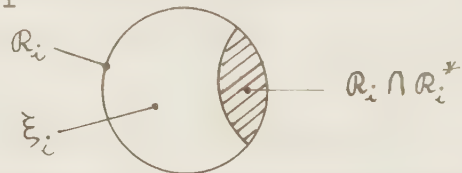
$$\begin{aligned} \underline{C}_{-i}^T R_i^* &= 0 \\ \underline{C}_{-i}^T R_i &\neq 0 \end{aligned} \quad i \in [1, m] \quad (25)$$

D'après la définition des $\mathcal{R}_i$

$$\mathcal{P} = \sum_{i=1}^m \mathcal{R}_i$$

De plus, tout sous-espace $\mathcal{R}_i$ peut être décomposé de la façon suivante

$$\mathcal{R}_i = \xi_i \oplus \mathcal{R}_i \cap \mathcal{R}_i^*$$



où ξ_i désigne le sous-espace d'état atteignable uniquement par v_i et $\mathcal{R}_i \cap \mathcal{R}_i^*$ le sous-espace d'état atteignable par v_i ou par $v_j \quad j \neq i$.

Par conséquent

$$P = \sum_{i=1}^m (\xi_i \oplus \mathcal{R}_i \cap \mathcal{R}_i^*)$$

$$= \xi_1 \oplus \xi_2 \oplus \dots \oplus \xi_m + \left(\bigcap_{i=1}^m \mathcal{R}_i \cap \mathcal{R}_i^* \right)$$

$\bigcap_{i=1}^m \mathcal{R}_i \cap \mathcal{R}_i^*$ représente le sous-espace d'état atteignable par $(v_1$ ou par $v_2, \dots, v_m)$ et par $(v_2$ ou par $v_1, v_2, \dots, v_m)$... et par $(v_m$ ou par $v_1, v_2, \dots, v_{m-1})$, autrement dit par $(v_1, v_2, \dots, v_{m-1})$ ou par $(v_2, v_3, \dots, v_m)$ ou par ... $(v_1, v_2, \dots, v_{m-1})$, ce qui signifie que

$$\sum_{i=1}^m \mathcal{R}_i \cap \mathcal{R}_i^* \subset \bigcap_{i=1}^m \mathcal{R}_i^* \triangleq \xi_{m+1}$$

Alors

$$P = \xi_1 \oplus \xi_2 \oplus \dots \oplus \xi_m \oplus \xi_{m+1}$$

Un exemple d'une telle décomposition est donné figure 4.

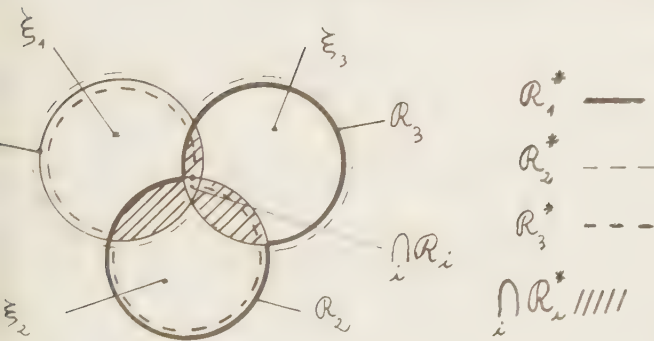


Figure 4

Il est clair qu'étant donné les définitions précédentes, les relations (25) se réduisent maintenant à :

$$\underline{C}_i^T \xi_j = 0 \quad \forall i \neq j \quad i, j \in [1, m]$$

$$\underline{C}_i^T \xi_{m+1} = 0 \quad \forall i$$

De plus :

Lemme 4 : Tout vecteur de ξ_i est orthogonal aux vecteurs de $\mathcal{R}_i^*$.

Supposons qu'il n'en soit pas ainsi. Alors il existe au moins un vecteur $\underline{z}$ de $\mathcal{R}_i^*$ non orthogonal au vecteur de ξ_i . Par conséquent, ce vecteur $\underline{z}$ a au moins une composante non nulle sur ξ_i et alors $\underline{C}_i^T \underline{z} \neq 0$ ce qui contredit (25).

Le lemme 4 suggère donc de rechercher pour $i \in [1, m]$ l'ensemble des vecteurs $\underline{n}_i$ orthogonaux à $\mathcal{R}_i^*$:

Nous noterons $Q_i (Q_i^T = \xi_i)$, l'espace des vecteurs lignes $\underline{n}_i^T$ tels que

$$\underline{n}_i^T R_i^* = 0 \quad i \in [1, m] \quad (26)$$

Par définition

$$\dim Q_i \stackrel{\Delta}{=} p_i = n - \dim R_i^*$$

Lemme 5 : Q_i est un sous-espace de vecteurs lignes invariant.

En effet soit $\underline{n}_i^T \in Q_i$ alors $\underline{n}_i^T R_i^* = 0$

Calculons

$$\underline{n}_i^T A R_i^* = 0$$

Par définition des R_i^* , $A R_i^* \subset R_i^*$. Il s'ensuit immédiatement que

$$\underline{n}_i^T A R_i^* = 0 \quad \text{et} \quad \underline{n}_i^T A \in Q_i$$

Lemme 6 : Les sous-espaces Q_i et Q_j sont indépendants pour $i, j \in [1, m] \quad i \neq j$

Supposons qu'il n'en soit pas ainsi alors il existe au moins un vecteur $\underline{n}^T$ tel que :

$$\underline{n}^T \in Q_i \quad \text{et} \quad \underline{n}^T \in Q_j$$

Donc

$$\underline{n}^T R_i^* = 0 \quad \text{et} \quad \underline{n}^T R_j^* = 0$$

ou

$$\underline{n}^T [R_i^* \mid R_j^*] = 0$$

ce qui entraîne

$$\underline{n}^T = 0$$

car

$$R_i^* + R_j^* = 0$$

Lemme 7 : Les vecteurs lignes $\underline{c}_i^T$, $\underline{c}_i^T A$, ..., $\underline{c}_i^T A^{d_i}$ forment une base complète ou incomplète de Q_i .

Le système S étant ID, il est clair que

$$\underline{c}_i^T \in Q_i$$

D'autre part étant donné l'invariance de Q_i

$$\underline{c}_i^T A^\ell \in Q_i \quad \text{pour} \quad \ell \in [0, d_i]$$

Testons l'indépendance linéaire de ces $d_i + 1$ vecteurs lignes. Pour cela, écrivons :

$$\rho_0 \underline{c}_i^T + \rho_1 \underline{c}_i^T A + \dots + \rho_{d_i} \underline{c}_i^T A^{d_i} = 0$$

Multiplions à droite par A^{d_i} . En tenant compte du fait que $\underline{c}_i^T A^{d_i+k} = 0$ pour $k > 0$ et $\underline{c}_i^T A^{d_i} \neq 0$, on en déduit immédiatement

$$\rho_0 = 0$$

Multiplions maintenant à droite par A^{d_i-1} , on en déduit :

$$\rho_1 = 0$$

etc...

$$\text{d'où} \quad \rho_0 = \rho_1 = \dots = \rho_{d_i} = 0$$

Remarque : La base est complète si $p_i = d_i + 1$.

Posons $p = \sum_{i=1}^m p_i$. Dans le cas général $p < n$, il existe donc Q_{m+1} tel que

$$P = Q_1 \oplus Q_2 \oplus \dots \oplus Q_m \oplus Q_{m+1}$$

avec

$$\dim Q_{m+1} = n - p$$

Remarque : Bien que les Q_i soient invariants, il n'y a aucune raison pour que dans le cas général Q_{m+1} soit également invariant.

5.3.2 - Forme canonique de $S^{(1)}$

La décomposition précédente de l'espace $\mathcal{P}$ va nous permettre de construire une transformation canonique particulièrement intéressante pour le système (23).

Soit Q la matrice

$$Q = \begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_m \\ Q_{m+1} \end{bmatrix}$$

où Q_i est une matrice de dimension $p_i \times n$, constituée de vecteurs lignes de base de $\mathcal{Q}_i$.

$$Q = \begin{bmatrix} \underline{c}_i^T \\ \underline{c}_i^T A \\ \vdots \\ \underline{c}_i^T A^{d_i} \\ \underline{q}_i^1 \\ \vdots \\ \underline{q}_i^{p_i} \end{bmatrix} \quad i \in [1, m] \quad Q_{m+1} = \begin{bmatrix} \underline{q}_{m+1}^1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \underline{q}_{m+1}^{p_{m+1}} \end{bmatrix}$$

a) Q est une matrice composée de vecteurs lignes de base $\mathcal{P}$ donc

$$Q = \mathcal{P}$$

et par conséquent

$$QA \subset Q$$

Donc il existe une matrice $\hat{A}$ telle que

$$QA = \hat{A} Q \quad \sim$$

(1) c'est-à-dire en fait S_c .

Etant donné que les Q_i sont indépendants et que les m premiers sont invariants, il est aisé de voir que la matrice $\hat{A}$ a une forme CD, identique à (7) pour laquelle $p_{m+2} = 0$.

b) De même pour $i \in [1, m]$

Donc il existe $\hat{A}_i$ telle que

$$Q_i A = \hat{A}_i Q_i$$

Compte tenu de la définition des Q_i et du fait que le système est ID ($\underline{c}_i^T A^{d_i+1} = 0$), il est aisé de voir que la matrice $\hat{A}_i$ a la forme suivante :

$$\hat{A}_i = \left[\begin{array}{cc|c} 0 & I_{d_i} & (0) \\ 0 & 0 & \\ \hline \psi_i & \phi_i & \end{array} \right] \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} d_i+1 \\ \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} r_i \\ \hline p_i \end{array} \quad (27)$$

Remarque :

Si $p_i = d_i + 1$, $\hat{A}_i$ se réduit alors à :

$$A_i = \begin{bmatrix} 0 & I_{d_i} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

c) Définissons $\hat{B}$ par $\hat{B} = Q B$

- Le système est ID donc

$$\begin{aligned} \underline{c}_i^T A^{d_i} \underline{B}_i &= \lambda_i \\ \underline{c}_i^T A^{d_i} \underline{B}_j &= 0 \quad j \neq i \quad i, j \in [1, m] \end{aligned}$$

- D'autre part

$$\underline{q}_k^T \in Q_i \quad i \in [1, m], \quad k \in [1, r_i] \quad \text{donc}$$

$$\underline{q}_k^T \underline{B}_j = 0 \quad j \neq i \quad \text{et} \quad \underline{q}_k^T \underline{B}_i \begin{cases} = 0 \\ \text{ou} \\ \neq 0 \end{cases}$$

$$\underline{q}_k^{T_{m+1}} \notin Q_i \quad i \in [1, m], \quad k \in [1, m+1] \quad \text{donc} \quad \underline{q}_k^{T_{m+1}} \underline{B}_i \begin{cases} = 0 \\ \text{ou} \\ \neq 0 \end{cases}$$

La matrice B est donc identique à celle d'une forme CD (8) pour

d) Par définition $\{C\} \subset Q$ dont il existe une matrice $\hat{C}$ telle que

$$C = \hat{C} Q$$

La définition de Q et des Q_i montre immédiatement que $\hat{C}$ est identique à celle d'une forme CD (9) pour laquelle $p_{m+2} = 0$.

Par conséquent, en effectuant le changement de base défini par $\tilde{x} = \underline{x}_{-C}$, $S_{\tilde{x}}$ est mis sous une forme canonique CD complètement commandable $\tilde{p}_{m+2} = 0$ pour laquelle les $\hat{A}_i$ ont la forme (27), pour $i \in [1, m]$.

De plus, $S_{\tilde{x}}$ étant complètement commandable par hypothèse la forme canonique CD correspondante $\hat{S}$ l'est également. Etant donné que les $\hat{x}_i$ représentent les états commandables uniquement par v_i et $\hat{x}_{m+1}$ la partie de l'état commandable par $(v_1, v_2, \dots, v_{m-1})$ ou par $(v_1, v_3, \dots, v_m)$ ou par $(v_1, v_2, v_4, \dots, v_m)$ etc... si l'un au moins de $\hat{x}_i$ n'est pas commandable $\hat{x}$ ne l'est pas, ce qui contredit l'hypothèse de départ. En conséquence $\hat{x}_i$ est complètement commandable ce qui signifie que $(\hat{A}_i, \hat{b}_i)$ l'est, $i \in [1, m]$.

Le théorème 3 est donc démontré.

5.4 - Théorèmes 4 et 5

La démonstration du théorème 4 étant évidente, nous l'omettrons volontairement. Le théorème 5, quant à lui, concerne essentiellement la forme des sous-systèmes $\hat{S}_i$ en boucle fermée.

Considérons le sous-système $\hat{S}_i = (\hat{A}_i, \hat{b}_i, \hat{c}_i)$. Son polynôme caractéristique est :

$$\begin{aligned} \det(sI_{r_i} - \hat{A}_i) &= s^{d_i+1} \cdot \alpha_i(s) \\ &= s^{p_i} + \alpha_{i_1} s^{p_i-1} + \dots + \alpha_{i_{r_i}} s^{d_i+1} \end{aligned}$$

Ce système est par hypothèse commandable, donc il existe une transformation régulière L_i qui le met sous la forme canonique dite à "variables de phase" [10] suivante :

$$L_i^{-1} \hat{A}_i L_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & -\alpha_{ir_i} & \dots & -\alpha_{i_1} \end{bmatrix} \quad L_i^{-1} \hat{b}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

et $\hat{C}_i^T L_i$

avec $L_i = [\hat{b}_i, \hat{A}_i, \hat{b}_i, \dots, \hat{A}_i^{p_i-1} \hat{b}_i]$.

$$\begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & \alpha_{ir_i} & \dots & -\alpha_{i_1} & 1 \\ \vdots & & & & & & \\ 0 & & & & & & \\ & \alpha_{ir_i} & & & & & \\ & \vdots & & & & & \\ & \alpha_{i_1} & & & & & \\ & & 1 & & & & \\ 1 & & & & & & \end{bmatrix} \quad (O)$$

Le système étant ID

$$\hat{C}_i^T [\hat{b}_i \dots \hat{A}_i^{p_i-1} \hat{b}_i] = [0 \dots 0 \lambda_i 0 \dots 0]$$

et par conséquent

$$\hat{C}_i^T L_i = \lambda_i [\alpha_{ir_i} \alpha_{i_1} r_{i-1} \dots \alpha_{i_1} 1 0 \dots 0]$$

- Si on boucle ce système par une loi $((\hat{C}_i^T - \pi_i^T), \gamma_i)$ il est alors évident que la fonction de transfert a bien la forme (15).
- D'autre part, vis à vis du système $\hat{S}_i$, la loi de commande est donnée par $\hat{k}_i^T = (\hat{\sigma}_i^T - \pi_i^T) V_i$, $V_i = L_i^{-1}$.
- La proposition (3) du théorème 6 découle évidemment de la forme CD de $\hat{S}(\hat{K}, \hat{G})$.

5.5 - Théorème 6

Ce théorème concerne évidemment la partie complètement commandable du système et par conséquent nous pouvons, sans restreindre la généralité du problème, supposer que $p_{m+2} = 0$.

Nous supposons donc dans ce qui suit qu'il n'y a que des modes commandables parmi lesquels p_{m+1} peuvent être inobservables, quelle que soit la loi de bouclage utilisée.

Par définition

$$\begin{aligned}
 p_{m+1} &= n - \sum_{i=1}^m p_i \\
 \text{avec} \quad p_i &= n - \dim \mathcal{R}_i^* \\
 \text{donc} \quad \sum_{i=1}^m p_i &= nm - \sum_{i=1}^m \dim \mathcal{R}_i^* \\
 \text{si} \quad p_{m+1} &= 0, \quad \sum_{i=1}^m p_i = n \quad \text{et, par conséquent,} \\
 \sum_{i=1}^m \dim \mathcal{R}_i^* &= n(m-1) \tag{28}
 \end{aligned}$$

Le problème se pose alors de la façon suivante : "Peut-on à partir du système initial S , construire un nouveau système S' pour lequel on peut satisfaire la condition (28)" ?

Lemme 8 : Une condition suffisante pour satisfaire (28) est $\bigcap_{i=1}^m \mathcal{R}_i^* = 0$

$$\bigcap_{i=1}^m \mathcal{R}_i^* = 0 \quad \sum_{i=1}^m \mathcal{R}_i^{*\perp} = \mathcal{X}$$

Par définition

$$\underline{n}_i \in \mathcal{R}_i^{*\perp} \quad \text{si} \quad \mathcal{R}_i^{*T} \cdot \underline{n}_i = 0$$

alors

$$\underline{n}_i \in \mathcal{R}_i^{*\perp} \quad \underline{n}_i^T \in \mathcal{Q}_i \quad \text{car} \quad \underline{n}_i^T \mathcal{R}_i^* = 0$$

et par conséquent

$$\mathcal{Q}_i^T = \mathcal{R}_i^{*\perp}$$

(les vecteurs colonnes de $\mathcal{R}_i^{*\perp}$ sont les vecteurs lignes de $\mathcal{Q}_i$)

$$\sum_{i=1}^m \mathcal{R}_i^{*\perp} = \sum_{i=1}^m \mathcal{Q}_i^T$$

Mais les $\mathcal{Q}_i$ sont indépendants donc

$$= \mathcal{Q}_1^T \oplus \mathcal{Q}_1^T \oplus \dots \oplus \mathcal{Q}_m^T \quad \text{ou bien} \quad \mathcal{Q} = \mathcal{Q}_1 \oplus \mathcal{Q}_2 \oplus \dots \oplus \mathcal{Q}_m$$

et par conséquent

$$\mathcal{Q}_{m+1} = 0, \text{ donc } p_{m+1} = 0$$

Remarque :

Les $\mathcal{R}_i^*$ sont indépendants si et seulement si les $\mathcal{R}_i$ le sont.

Découplage et placement des pôles sont donc possibles simultanément si $\bigcap_{i=1}^m \mathcal{R}_i = 0$ ⁽¹⁾, c'est-à-dire si les sous-espaces d'états atteignables uniquement par v_i sont indépendants.

Nous pouvons sans restreindre la généralité du problème raisonner sur un système ID complètement commandable $(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C})$.

Soit $\mathcal{R}_i$ avec $\dim \mathcal{R}_i = v_i$ $i \in [1, m]$, les sous-espaces associés à $(\bar{A}, \bar{B}, \bar{C})$, où v_i est le plus grand entier tel que la matrice

$$M_i = [\bar{B}_i \vdots \bar{A} \bar{B}_i \vdots \dots \vdots \bar{A}^{v_i-1} \bar{B}_i]$$

soit de rang maximum.

On pose $v = \sum_{i=1}^m v_i$. Le système étant complètement commandable $v > n$ (si $v = n$ $\bigcap_{i=1}^m \mathcal{R}_i = 0$).

Supposons $v > n$ et posons

$$\$ = [\$ _1 \vdots \$ _2 \vdots \dots \vdots \$ _m] \text{ avec } \$ _i = \begin{bmatrix} M_i \\ -\frac{1}{E_i} \end{bmatrix} \text{ et } \dim \$ = v \times v$$

où les E_i sont des matrices de dimension $(v - n) \times v_i$ telles que $\text{rang } \$ = v$.

Du fait que le système (A, B, C) est ID, les vecteurs colonnes $\bar{A}^j \bar{B}_i$, $i \in [1, m]$ et $j \in [0, p_i - 1]$ sont des vecteurs linéairement indépendants de la matrice

$$M = [M_1 \vdots M_2 \vdots \dots \vdots M_m] \quad \dim M = n \times v$$

(1) Ce résultat a été établi pour la première fois dans [5] en utilisant une approche géométrique.

(ceci se vérifie facilement en considérant la forme CD associée).

Effectuons une permutation des colonnes de M de façon que :

- les $\sum_{i=1}^m p_i$ premières colonnes soit $\overline{A}^j \overline{B}_i$ $i \in [1, m]$ et $j \in [0, p_i - 1]$
- les n premières colonnes soient linéairement indépendantes.

Alors M est "équivalente" à M_0 où $M_0 = [N_1 \mid N_2]$ avec $\text{rang } N_1 = n$

Posons
$$\$ _0 = \begin{bmatrix} N_1 & & N_2 \\ \hline 0 & & I_{v-n} \end{bmatrix}$$

Alors $\text{rang } \$ _0 = v$ et en réorganisant de façon convenable les colonnes de $\$ _0$, il est aisé d'obtenir S et par conséquent les E_i , $i \in [1, m]$.

En utilisant ce procédé de construction ⁽¹⁾, il est alors possible d'augmenter $(\overline{A}, \overline{B}, \overline{C})$ de $k = v - n$ variables de telle façon que les sous-espaces $\$ _i$ (équivalents des $\mathcal{R}_i$ pour le système augmenté $(\overline{A}', \overline{B}', \overline{C}')$), soient indépendants pour $i \in [1, m]$.

Soit

$$\begin{bmatrix} \underline{\dot{x}} \\ \underline{\dot{z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \overline{A} & (0) \\ \hline \overline{L} & \overline{K} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x} \\ \underline{z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \overline{B} \\ \hline 0 \end{bmatrix} \underline{v} \equiv \overline{A}' \begin{bmatrix} \underline{x} \\ \underline{z} \end{bmatrix} + \overline{B}' \underline{v}$$

$$\underline{y} = [\overline{C} \mid 0] \begin{bmatrix} \underline{x} \\ \underline{z} \end{bmatrix} \equiv \overline{C}' \begin{bmatrix} \underline{x} \\ \underline{z} \end{bmatrix}$$
(29)

Le système (29) est évidemment découplé puisque

$$\overline{C}' \overline{A}^j \overline{B}' = \overline{C} \overline{A}^j \overline{B} \quad j \in [0, v-1]$$

Les matrices L et K doivent être maintenant déterminées de telle façon que les $\$ _i$ soient les équivalents des $\mathcal{R}_i$ pour (29), c'est-à-dire que :

- $\$ _i$ doit être généré par $\overline{B}'_i$
- $\overline{A}' \$ _i \subset \$ _i$

(1) Ce procédé de construction et les résultats qui en découlent sont dus à Howze et Pearson [6].

Remarquons que $\bar{A} \mathcal{R}_i \subset \mathcal{Q}_i$

donc il existe une matrice J_i telle que

$$\bar{A} M_i = M_i J_i \quad i \in [1, m] \quad \dim J_i = v_i \times v_i$$

Formons

$$J = \begin{bmatrix} J_1 & & & \\ & J_2 & & \\ & & \ddots & \\ (O) & & & J_m \end{bmatrix}$$

et écrivons que $\bar{A}'$ est semblable à J par $\$$ alors

$$J = \$^{-1} \bar{A}' \$$$

ou

$$\bar{A}' = \$ J \$^{-1}$$

$$\$ \triangleq \begin{bmatrix} M \\ \hline E \end{bmatrix} \quad \text{avec } E = [E_1 \mid E_2 \mid \dots \mid E_m]$$

donc

$$\begin{bmatrix} \bar{A} & \mid & O \\ \hline L & \mid & K \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M \\ \hline E \end{bmatrix} J \$^{-1}$$

et par conséquent

$$[L \mid K] = E J \$^{-1}$$

Pour L , K et J ainsi données, les $\$ _i$ ont bien les propriétés voulues. De plus, comme ils sont indépendants, la condition (28) est satisfaite pour $(\bar{A}', \bar{B}', \bar{C}')$.

Remarque :

Dans le cas général, pour obtenir à partir de S un système découplé dont les pôles peuvent être fixés arbitrairement, il suffit d'adjoindre en parallèle à S le compensateur dynamique (L, K) déterminé à partir de $\bar{S}$.

En effet :

$$\text{soit } A' = \begin{bmatrix} A & | & O \\ \hline L & | & K \end{bmatrix} \quad B' = \begin{bmatrix} B \\ \hline O \end{bmatrix} \quad C' = [C \quad | \quad O]$$

Alors $D' = D$

$$A'^* = [A^* \quad | \quad O]$$

et par conséquent, en utilisant la loi de commande

$$\underline{u} = -D'^{-1} A'^* \begin{bmatrix} \underline{x} \\ \hline \underline{z} \end{bmatrix} + D'^{-1} \underline{v}$$

on obtient bien le système (29).

Remarque :

Si le système S n'est pas à état complètement commandable, le compensateur dynamique est déterminé non plus à partir de $\bar{S}$ mais de $\tilde{S}$, soit $(\tilde{L}, \tilde{K})$; pour le système S , on doit alors utiliser $(L, \tilde{K})$ avec $L = \begin{bmatrix} \tilde{L} & | & \underbrace{O}_{p_{m+2}} \end{bmatrix} T_1$.

5.6 - Extension au cas discret

La théorie du découplage telle qu'elle a été développée dans ce chapitre, s'applique à des systèmes continus linéaires et stationnaires de dimensions finies. Les résultats qui ont été établis restent valables également pour les systèmes discrets, décrits par des équations récurrentes du type :

$$\underline{x}_{k+1} = \Phi \underline{x}_k + \Gamma \underline{u}_k$$

$$\underline{y}_k = H \underline{x}_k$$

En effet, parmi les démonstrations qui ont été faites, seul le Lemme 1 utilise l'hypothèse "système continu". Or, il est facile de montrer que dans l'hypothèse "système discret", ce lemme reste vrai en changeant s en z :

Soit le système discret

$$\underline{x}(n+1) = \Phi \underline{x}(n)$$

(30)

et $\underline{x}(z)$ la transformée en z de la séquence $\{\underline{x}(n)\}_{n=0}^{\infty}$

$$\underline{x}(z) \triangleq \sum [\underline{x}(n)] \triangleq \sum_{n=0}^{\infty} \underline{x}(n) z^{-n} \quad (31)$$

Compte tenu de (30)

$$\underline{x}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} [\phi^n \underline{x}(0)] z^{-n}$$

$$\underline{x}(z) = \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\phi^n}{z^n} \right\} \underline{x}_0 \quad (32)$$

$$[\underline{x}(n+1)] = z[\underline{x}(z) - \underline{x}(0)]$$

Donc

$$z[\underline{x}(z) - \underline{x}(0)] = \phi \underline{x}(z)$$

$$(z I_n - \phi) \underline{x}(z) = z \underline{x}(0)$$

$$\underline{x}(z) = z(z I_n - \phi)^{-1} \underline{x}(0) \quad (33)$$

En comparant (32) et (33) on en déduit

$$z(z I_n - \phi)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\phi^n}{z^n}$$

ou

$$(z I_n - \phi)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\phi^n}{z^{n+1}}$$

Ce fait est par ailleurs justifié avec l'approche utilisée dans [2] et par celle utilisée plus récemment dans [5], où les auteurs analysent les propriétés structurelles d'un triplet (A,B,C), sans faire la distinction continu-discret, et sans faire intervenir la notion de matrice de transfert.

6 - CONCLUSION

Nous avons établi dans ce chapitre, aussi bien dans le cas continu que dans le cas discret, une condition nécessaire et suffisante de découplage et indiqué comment on peut simultanément découpler un système et le stabiliser. Les principales étapes qui permettent d'atteindre cet objectif sont résumées au paragraphe 4 sous forme d'un tableau, qui constitue par ailleurs l'organigramme général d'un programme FORTRAN, permettant d'exécuter de façon systématique toutes les opérations nécessaires à la synthèse d'un système découplé (Annexe 1).

La clé de ce chapitre est évidemment la "forme canonique découplée" des systèmes non interactifs, qui permet de mettre en évidence m sous-systèmes mono-entrée mono-sortie, pouvant être pilotés indépendamment les uns des autres. Nous avons donné également la forme des fonctions de transfert relatives à chaque sous-système (théorème 5). Il reste maintenant à déterminer les bouclages $\hat{k}_i^T$ du compensateur de telle sorte que les dynamiques du système en boucle fermée répondent à des performances requises.

Cette étude fera l'objet des deux chapitres suivants.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] P.L. FALB
W.A. WOLOVICH "Decoupling in the Design Synthesis of Multivariable Control Systems"
IEEE. Trans. on Aut. Cont., vol. AC-12, 6, pp. 651-659, Décembre 1967
- [2] E. G. GILBERT "The decoupling of multivariable systems by state feedback"
S. I. A. M Journal Control, vol. 7, 1, pp. 50-63, Février 1969
- [3] P. C. CHANDRASEKHARAN "Invariants Properties of State variable Feedback"
2nd IFAC Symposium Düsseldorf, Octobre 1971
- [4] P. C. CHANDRASEKHARAN "Observability and Decoupling"
IEEE. Trans. on Aut. Cont., vol. AC-16, 5, pp. 482-484, Octobre 1971
- [5] W. M. WONHAM
A. S. MORSE "Decoupling and Pole Assignment in Linear Multivariable Systems : a geometric approach".
S. I. A. M. Journal Control, 8, pp. 1-18, Février 1970
- [6] J. W. HOWZE
J. B. PEARSON "Decoupling and Arbitrary Pole Placement in Linear Systems using output Feedback".
IEEE Trans. on Aut. Cont. vol. AC-15, 6, pp. 660-663 Décembre 1970
- [7] L. M. SILVERMAN "Decoupling with state Feedback and Precompensation"
IEEE Trans. on Aut. Cont. , AC-15, 4, pp. 487-489, Août 1970
- [8] S. H. WANG
"Design of a Precompensator for Decoupling Problem"
Elect. Letters, Vol. 6, pp. 739-741, Nov. 1970
- [9] M. CREMER "A precompensation of minimal order for Decoupling a Linear Multivariable System"
Int. J. Cont. , vol. 14, 6, pp. 1089-1103
- [10] C. MACHU "Formes canoniques pour les systèmes linéaires multivariables"
IRIA, Cahier n°3, pp. 288-309, novembre 1970.

CHAPITRE 2

COMMANDE DES SOUS-SYSTÈMES DÉCOUPLÉS : CAS CONTINU

° ° °
°

- 1 - Introduction
- 2 - Rappels sur la théorie de la commande optimale
- 3 - Condition nécessaire et suffisante d'optimalité pour une loi de commande K
- 4 - Commande optimale d'un système découplé
- 5 - Détermination du bouclage optimal $\hat{K}_1$ pour un sous-système découplé
- 6 - Conclusion

Résumé : On aborde dans ce chapitre la compensation des sous-systèmes continus découplés, d'un point de vue optimal. Le résultat principal est que, pour un système découplé, le critère de performance peut lui-même être découplé, ce qui permet, sur le plan pratique de se ramener au réglage de sous-systèmes mono-entrée mono-sortie au lieu de devoir ajuster globalement les performances d'un système multi-entrées multi-sorties, généralement fortement couplé. De plus, lorsque les sous-systèmes se présentent comme des intégrateurs purs en cascade, on propose un algorithme simple d'ajustement du temps de réponse et du dépassement indiciel de ces sous-systèmes.

1 - INTRODUCTION

Dans le chapitre précédent, nous nous sommes intéressés au problème de la non-interaction en soi, c'est-à-dire plus particulièrement à la structure du compensateur permettant de réaliser cet objectif (ch. 1, th. 4) et à la forme des éléments de la matrice de transfert du système en boucle fermée obtenu (ch. 1, th. 5). Dans la pratique, la condition de non-interaction n'est pas suffisante. On exige également que le compensateur soit conçu de façon à satisfaire certaines performances. Sa détermination se trouve néanmoins simplifiée du fait de la non-interaction qui transforme le système initial multi-entrées multi-sorties, en un ensemble de systèmes mono-entrée mono-sortie entièrement découplés, qui peuvent être dès lors réglés suivant les méthodes classiques comme les méthodes fréquentielles par exemple, ou bien en utilisant des méthodes temporelles comme l'optimalisation quadratique, ou bien même en utilisant conjointement les deux.

C'est ce dernier point de vue que nous avons choisi de développer dans ce chapitre et ceci essentiellement pour deux raisons : d'une part, l'optimalisation quadratique possède toutes les caractéristiques de la régulation classique (stabilité asymptotique, insensibilité aux variations de paramètres et aux perturbations), et présente l'avantage par rapport à cette dernière de conduire à une solution analytique, d'autre part, dans le cas qui nous intéressera (mono-entrée mono-sortie), nous verrons qu'il est relativement aisé de relier les pôles du système optimal aux facteurs de pondération du critère et, par conséquent, de rattacher à ces derniers des notions, plus tangibles pour l'ingénieur automatique, exprimées en termes de réponses indicielles comme un temps de réponse, un temps de montée, un dépassement, etc...

Le désir de découpler un système de façon optimale soulève plusieurs questions :

- Découplage et optimalisation quadratique sont-ils deux objectifs compatibles ?
- Dans l'affirmative, comment peut-on trouver au moins une classe $\mathcal{J}$ des critères quadratiques qui rendent le système optimal non interactif (au sens du chapitre 1).
- Quel est le lien entre la classe précédente et celles des lois de commande $\mathcal{F}$ qui découplent le système (cf. chap. 1).

- Comment choisir les éléments de J conduisant à des performances dynamiques imposées.

Pour répondre à ces différentes questions, ce chapitre est organisé de la façon suivante :

Un rappel des principaux résultats dont la connaissance est nécessaire pour la mise en oeuvre d'une régulation quadratique optimale est effectuée aux paragraphes 2 et 3. On rappelle notamment au paragraphe 3 une condition nécessaire et suffisante d'optimalité exprimée dans le domaine fréquentiel, qui servira à établir le résultat principal de ce chapitre, exposé au paragraphe 4 : *"Tout critère quadratique associé à un système découplé peut lui-même être découplé"*. On peut alors réduire le problème initial d'optimisation globale à plusieurs problèmes d'optimisation indépendants les uns des autres et relatifs à des systèmes mono-entrée mono-sortie de dimensions réduites. Enfin, au paragraphe 5, nous abordons le problème de la compensation de ces sous-systèmes d'un point de vue pratique. Une solution complète à ce problème y est donnée dans le cas où on peut considérer que le sous-système est sans numérateur et composé d'intégrateurs purs en cascade.

2 - RAPPELS SUR LA THEORIE DE LA COMMANDE OPTIMALE QUADRATIQUE

Notre but n'étant pas de rappeler ici les nombreux résultats acquis à l'heure actuelle sur la théorie de la commande optimale quadratique, nous nous limiterons volontairement dans le choix du critère, celui-ci étant toutefois choisi de telle façon que le placement arbitraire des pôles du système optimal soit arbitrairement possible.

2.1 - Position du problème. Equivalence avec un problème plus classique

Considérons le système linéaire et stationnaire complètement commandable :

$$\dot{\underline{x}} = A \underline{x} + B \underline{u} \quad (1)$$

Etant donné un critère de performance J de la forme ⁽¹⁾ :

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (\underline{x}^T Q \underline{x} + 2 \underline{u}^T S \underline{x} + \underline{u}^T R \underline{u}) dt \quad (2)$$

(1) On démontre en effet qu'avec un tel critère le placement arbitraire des pôles du système optimal est possible, ce qui n'est pas le cas si $S = 0$, [1], [2].

où les matrices de pondération sont telles que :

- Q est symétrique définie non négative,
- R est symétrique définie positive,
- $Q - S^T R^{-1} S$ est définie non négative.

Le problème de la commande optimale consiste à rechercher une loi de commande :

$$\underline{u}^* = -K \underline{x} \quad (3)$$

qui rende (2) minimum compte tenu de (1).

Remarque : L'hypothèse faite sur $Q - S^T R^{-1} S$ se justifie par l'équivalence qui existe entre ce problème et un problème plus classique ne comportant pas de termes croisés dans le critère :

Ecrivons :

$$\underline{x}^T Q \underline{x} + \underline{u}^T S \underline{x} + \underline{u}^T R \underline{u} = \underline{x}^T (Q - S^T R^{-1} S) \underline{x} + (\underline{u} + R^{-1} S \underline{x})^T R (\underline{u} + R^{-1} S \underline{x})$$

et posons :

$$\underline{u}_1 = \underline{u} + R^{-1} S \underline{x} \quad (4)$$

alors le système (1) s'écrit :

$$\dot{\underline{x}} = A_1 \underline{x} + B \underline{u}_1 \quad \text{avec } A_1 = A - B R^{-1} S \quad (5)$$

tandis que (2) se met sous la forme :

$$J = \frac{1}{2} \int_0^\infty (\underline{x}^T Q_1 \underline{x} + \underline{u}_1^T R \underline{u}_1) dt \quad \text{avec } Q_1 = Q - S^T R^{-1} S \quad (6)$$

Pour le problème I, défini par (1) et (2) et le problème II défini par (5) et (6) il y a donc équivalence en ce sens que :

- Pour un même point de départ, les trajectoires optimales sont identiques et les valeurs minimum des critères sont les mêmes.

- Les commandes optimales sont reliées par (4).

Dans ce qui suit, compte tenu de cette équivalence, nous nous bornerons à rappeler les résultats relatifs au problème II.

2.2 - Solution du problème II

Pour R et Q_1 , définies précédemment, il existe une commande optimale

$$\underline{u}_1^* = - R^{-1} B^T \bar{P} \underline{x}$$

où $\bar{P}$ est le régime permanent de l'équation différentielle de Riccati

$$\dot{\bar{P}} + \bar{P} A_1 + A_1^T \bar{P} - \bar{P} B R^{-1} B^T \bar{P} + Q_1 = 0$$

intégrée à rebours à partir d'une initialisation semi définie positive quelconque.

De plus, si la paire (H, A_1) , où H est définie par $Q_1 = H^T H^{(1)}$ est complètement observable, la solution $\bar{P}$ est aussi l'unique solution définie positive de l'équation algébrique :

$$\bar{P} A_1 + A_1^T \bar{P} - \bar{P} B R^{-1} B^T \bar{P} + Q_1 = 0$$

et la stabilité asymptotique du système optimal en boucle fermée est assurée.

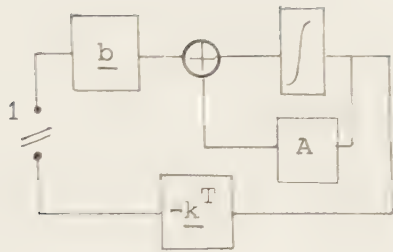
3 - RAPPEL SUR LE PROBLEME INVERSE DE LA COMMANDE OPTIMALE QUADRATIQUE :

Condition nécessaire et suffisante d'optimalité pour une loi de commande K_1

Pour un système linéaire et stationnaire associé à un critère en temps infini, la loi de commande est elle-même stationnaire, puisque la matrice $\bar{P}$ est constante. Il est alors possible de caractériser le régulateur optimal dans le domaine fréquentiel en utilisant des concepts de la théorie de la commande classique comme le "gain de boucle" et la "différence de retour"⁽²⁾.

(1) Q_1 étant définie non négative, une telle factorisation est toujours possible.

(2) En anglais : "return ratio" et "return difference", respectivement.



$$\Phi(s) = (sI - A)^{-1}$$

$$\text{"gain de boucle"} : - \underline{k} \Phi(s) \underline{b}$$

$$\text{"différence de retour"} : 1 + \underline{k}^T \Phi(s) \underline{b}$$

Figure 1 - "Illustration des notions de "gain de boucle" et de "différence de retour" pour un système mono-entrée mono-sortie, la boucle de retour étant coupée à l'entrée".

La liaison qui existe entre celle-ci et la théorie de la commande optimale quadratique, développée par Kalman dans le cas mono-entrée mono-sortie [1] et dans le cas multi-entrées multi-sorties par Anderson et Mac Farlane [4], [5] est résumée dans le théorème suivant.

Théorème 1 :

Etant donné le système complètement commandable (5) et le critère quadratique (6) pour lequel R est définie positive, la loi de commande

$$\underline{u} = - K_1 \underline{x}$$

minimise (6) pour H quelconque, mais toutefois telle que (H, A_1) soit complètement observable, si et seulement si :

- a) K_1 est une loi de commande stable pour (5),
- b) la relation suivante est vérifiée pour tout $\omega > 0$

$$[I_m + R^{1/2} K_1 (-j\omega I_n - A_1)^{-1} B R^{-1/2}]^T [I_m + R^{1/2} K_1 (j\omega I_n - A_1)^{-1} B R^{-1/2}] \geq I_m \quad (1)$$

Remarque 2 :

La condition b) constitue une généralisation au cas multi-entrées multi-sorties du "critère du cercle", qui s'exprime dans le cas mono-entrée mono-sortie par

$$|1 + \underline{k}^T (j\omega I_n - A_1)^{-1} \underline{b}| \geq 1 \quad \omega \geq 0$$

En d'autres termes, ceci signifie que le lieu de Nyquist de la "différence de retour" évite le cercle de rayon unité centré en $(0,0)$ (fig. 2).

(1) $C_1 > C_2$ signifie que la matrice $C_1 - C_2$ est non négative.

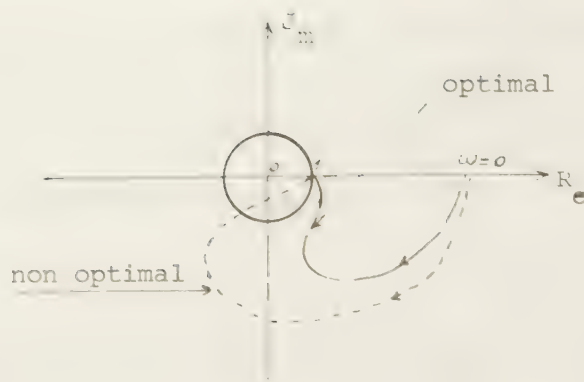


Figure 2 : "Exemple de lieu de Nyquist de la différence de retour dans le cas mono-entrée mono-sortie

Du théorème 1, nous ne démontrerons que la condition nécessaire (1)
car certains résultats intermédiaires nous seront utiles par la suite.

Considérons l'équation algébrique satisfaite par $\bar{P}$

$$-\bar{P} A_1 - A_1^T \bar{P} + \bar{P} B R^{-1} B^T \bar{P} = Q_1$$

Si l'on pose $K_1 = R^{-1} B^T \bar{P}$, celle-ci peut s'écrire

$$\bar{P}(sI_n - A_1) + (-sI_n - A_1^T) \bar{P} + K_1^T R K_1 = Q_1$$

Multiplions à gauche par $B^T(-sI_n - A_1^T)^{-1}$ et à droite par $(sI_n - A_1)^{-1}B$
il vient :

$$\begin{aligned} B^T(-sI_n - A_1^T)^{-1} \bar{P} B + B^T \bar{P}(sI_n - A_1)^{-1} B + B^T(-sI_n - A_1^T)^{-1} K_1^T R K_1 (sI_n - A_1)^{-1} B \\ = B^T(-sI_n - A_1^T)^{-1} Q_1 (sI_n - A_1)^{-1} B \end{aligned}$$

En ajoutant R à chaque membre et en remarquant que $\bar{P} B = K_1^T R$, on obtient :

$$\begin{aligned} [I_m + K_1(-sI_n - A_1^T)^{-1} B]^T R [I_m + K_1(sI_n - A_1)^{-1} B] = \\ R + B^T(-sI_n - A_1^T)^{-1} Q_1 (sI_n - A_1)^{-1} B \end{aligned}$$

(1) La condition suffisante a été démontrée par Anderson [4].

Posons $s = j\omega$. Alors

$$|I_m + K_1(-j\omega I_n - A_1)^{-1}B|^T R |I_m + K_1(j\omega I_n - A_1)^{-1}B| =$$

$$P + R^T(-j\omega I_n - A_1^T)^{-1} Q_1(j\omega I_n - A_1)^{-1} B$$

La matrice $B^T(-j\omega I_n - A_1^T)^{-1} Q_1(j\omega I_n - A_1)^{-1} B$ étant définie non négative ceci implique que :

$$[I_m + K_1(-j\omega I_n - A_1)^{-1}B]^T R [I_m + K_1(j\omega I_n - A_1)^{-1}B] \geq R \quad (7)$$

ce qui équivaut à

$$[I_m + R^{1/2} K_1(-j\omega I_n - A_1)^{-1} B R^{-1/2}]^T [I_m + R^{1/2} K_1(j\omega I_n - A_1)^{-1} B R^{-1/2}] \geq I_m$$

4 - COMMANDE OPTIMALE D'UN SYSTEME DECOUPLE

Considérons le système ID, complètement commandable ⁽¹⁾ mis sous forme CD (cf. chapitre 1)

$$\dot{\underline{\hat{x}}} = \hat{A} \underline{\hat{x}} + \hat{B} \underline{v} \quad (8)$$

$$\underline{y} = \hat{C} \underline{\hat{x}}$$

avec :

$$\underline{\hat{x}} = \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \vdots \\ \hat{x}_m \\ \hat{x}_{m+1} \end{bmatrix} \quad \hat{A} = \begin{bmatrix} \hat{A}_1 & & & & \\ & \hat{A}_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \hat{A}_m & \\ \hat{A}_1^c & \hat{A}_2^c & \dots & \hat{A}_m^c & \hat{A}_{m+1} \end{bmatrix} \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} \hat{b}_1 & & & & \\ & \hat{b}_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \hat{b}_m & \\ \hat{b}_1^c & \hat{b}_2^c & \dots & \hat{b}_m^c & \hat{b}_{m+1}^c \end{bmatrix} \quad (O)$$

$$\hat{C} = \begin{bmatrix} \hat{C}_1^T & & & & \\ & \hat{C}_2^T & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \hat{C}_m^T & \\ (O) & & & & (O) \end{bmatrix}$$

(1) Si le système ID n'est pas complètement commandable, on raisonne sur la partie complètement commandable extraite de la forme CD (chapitre 1).

où $\underline{\hat{x}}_i, \underline{\hat{b}}_i, \underline{\hat{c}}_i$ sont des vecteurs de dimensions p_i , $\hat{A}_i$ est une matrice $p_i \times p_i$, pour $i \in [1, m]$.

La classe de toutes les lois de commande qui maintiennent le découplage pour (8) a été caractérisée au chapitre 1 (th. 5) comme suit : le système CD (8) reste découplé sous l'action d'un bouclage supplémentaire du type :

$$\underline{\dot{v}} = - \hat{K} \underline{\hat{x}} + \underline{w} \quad \dim \underline{w} = \dim \underline{v}$$

si et seulement si $\hat{K}$ a la forme suivante :

$$\hat{K} = \begin{bmatrix} \hat{k}_1^T & & (0) & \\ & \hat{k}_2^T & & (0) \\ (0) & & \ddots & \\ & & & \hat{k}_m^T \end{bmatrix} \quad (9)$$

où $\hat{k}_i$ est un vecteur de dimension p_i pour $i \in [1, m]$.

La loi de bouclage $\hat{K}$ peut être choisie de façon optimale :

Lemme 1 :

Etant donné le système CD (8) et le critère

$$\hat{J} = \frac{1}{2} \int_0^\infty (\underline{\hat{x}}^T \hat{Q} \underline{\hat{x}} + 2 \underline{v}^T \hat{S} \underline{\hat{x}} + \underline{v}^T \hat{R} \underline{v}) dt \quad (10)$$

où $\hat{R}$ est définie positive, $\hat{Q}$ et $\hat{Q} - \hat{S}^T \hat{R}^{-1} \hat{S}$ sont définies non négatives. Alors si $\hat{R}$, $\hat{Q}$ et $\hat{S}$ ont la forme suivante :

$$\hat{R} = \begin{bmatrix} \hat{r}_1 & & (0) \\ & \hat{r}_2 & \\ (0) & & \ddots \\ & & & \hat{r}_m \end{bmatrix} \quad \hat{Q} = \begin{bmatrix} \hat{Q}_1 & & (0) \\ & \hat{Q}_2 & \\ (0) & & \ddots \\ & & & \hat{Q}_m \\ & & & & 0 \end{bmatrix} \quad \hat{S} = \begin{bmatrix} \hat{s}_1^T & & (0) \\ & \hat{s}_2^T & \\ (0) & & \ddots \\ & & & \hat{s}_m^T \end{bmatrix} \quad (11)$$

où $\hat{r}_i$ est un scalaire, $\hat{Q}_i$ une matrice $p_i \times p_i$ et $\hat{s}_i$ un vecteur de dimension p_i , pour $i \in [1, m]$, la loi de bouclage, obtenue en résolvant ce problème d'optimisation, a la forme (9).

En effet si $\hat{R}$, $\hat{Q}$ et $\hat{S}$ ont effectivement la forme (11), il est clair que le problème d'optimisation, défini par (8) et (10), se réduit à m problèmes d'optimisation indépendants les uns des autres définis par :

$$\begin{aligned}\dot{\underline{\hat{x}}}_i &= \hat{A}_i \underline{\hat{x}}_i + \hat{b}_i v_i \\ y_i &= \hat{c}_i^T \underline{\hat{x}}_i\end{aligned}\tag{12}$$

$$\hat{J}_i = \frac{1}{2} \int_0^\infty (\underline{\hat{x}}_i^T \hat{Q}_i \underline{\hat{x}}_i + 2 v_i \hat{S}_i^T \underline{\hat{x}}_i + \hat{r}_i v_i^2) dt\tag{13}$$

La solution de ce problème est :

$$v_i = - \hat{k}_i^T \underline{\hat{x}}_i + w_i$$

où $\hat{k}_i$ est un vecteur de dimension p_i , obtenu en résolvant une équation de Riccati d'ordre p_i (cf. §2).

Donc si $\hat{R}$, $\hat{Q}$, $\hat{S}$ ont la forme (11), la matrice de bouclage, solution du problème d'optimisation définie par (8) et (10), a la forme (9) et par conséquent maintient le découplage.

Le lemme 1 met donc en évidence une classe particulière de critères quadratiques permettant d'effectuer un découplage optimal d'un système CD. Montrons que toutes les lois de commande optimales qui maintiennent le découplage pour (8) peuvent être obtenues à l'aide d'éléments de la classe précédente⁽¹⁾.

Théorème 2 :

Soit R' et Q' des matrices arbitraires symétriques définies positive et non négative respectivement et S' une matrice telle que $Q' - S'^T R'^{-1} S'$ soit non négative. Si la minimisation du critère quadratique, compte tenu de (8)

$$J' = \frac{1}{2} \int_0^\infty (\underline{\hat{x}}^T Q' \underline{\hat{x}} + 2 \underline{v}^T S' \underline{\hat{x}} + \underline{v}^T R' \underline{v}) dt\tag{14}$$

conduit à une loi de commande stable $\hat{K}$ découplant (8), alors il existe des ma-

(1) Cet important résultat a été établi dans [6] lorsqu'il n'y a pas de termes croisés dans le critère.

trices $\hat{R}$, $\hat{Q}$ et $\hat{S}$, (cf. (11)), telles que la minimalisation du critère

$$\hat{J} = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (\underline{\hat{x}}^T \hat{Q} \underline{\hat{x}} + 2 \underline{v}^T \hat{S} \underline{\hat{x}} + \underline{v}^T \hat{R} \underline{v}) dt$$

conduise précisément à la même loi de commande $\hat{K}$ pour le système (8).

Compte tenu de l'équivalence établie au paragraphe 2, le problème défini par (8) et (14) peut se mettre sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \dot{\underline{\hat{x}}} &= \hat{A}_1 \underline{\hat{x}} + \hat{B} \underline{v}_1 \\ \underline{y} &= \hat{C} \underline{\hat{x}} \end{aligned} \quad \text{avec} \quad \begin{aligned} \underline{v}_1 &= \underline{v} + R'^{-1} S' \underline{\hat{x}} \\ \hat{A}_1 &= \hat{A} - \hat{B} R'^{-1} S' \end{aligned} \quad (15)$$

$$J = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (\underline{\hat{x}}^T Q'_1 \underline{\hat{x}} + \underline{v}_1^T R' \underline{v}_1) dt \quad \text{où} \quad Q'_1 = Q_1 - S'^T R'^{-1} S' \quad (16)$$

Puisque $\hat{K}$ est par hypothèse une loi de commande optimale, solution du problème défini par (8) et (14), on a :

$$\hat{K} = \hat{K}_1 + R'^{-1} S' \quad (17)$$

où $\hat{K}_1$ est solution du problème d'optimisation défini par (15) et (16) (cf. §2). $\hat{K}_1$ est donc une loi de commande optimale pour (15). Alors, d'après le théorème 1, la condition

$$[I_m + \hat{K}_1 (-j\omega I_n - \hat{A}_1)^{-1} \hat{B}]^T R' [I_m + \hat{K}_1 (j\omega I_n - \hat{A}_1)^{-1} \hat{B}] \succcurlyeq R' \quad (12)$$

est vérifiée $\forall \omega > 0$.

Supposons pour l'instant que $R'^{-1} S'$ ait la forme particulière (9). Alors il est clair que :

- d'après (17), la matrice $\hat{K}_1$ a la forme (9) ;
- la matrice $\hat{A}_1$ a la même forme que $\hat{A}$.

Dans ces conditions, étant donné donc les formes particulières de $\hat{A}_1$, $\hat{B}$, $\hat{K}_1$, il est aisé de vérifier que les matrices

$$[I_m + \hat{K}_1 (\pm j\omega I_n - \hat{A}_1)^{-1} \hat{B}]$$

sont des matrices diagonales d'éléments :

$$[1 + \hat{k}_{1i}^T (\pm j\omega I_{p_i} - \hat{A}_{1i})^{-1} \hat{b}_i] \text{ pour } i \in [1, m]$$

De plus, la matrice R' étant par définition définie positive ses éléments diagonaux sont tous positifs. Comme les éléments diagonaux d'une matrice définie non négative sont non négatifs, l'inégalité matricielle ci-dessus se réduit à :

$$[1 + \hat{k}_{1i}^T (-j\omega I_{p_i} - \hat{A}_{1i})^{-1} \hat{b}_i] r'_{ii} [1 + \hat{k}_{1i}^T (j\omega I_{p_i} - \hat{A}_{1i})^{-1} \hat{b}_i] \geq r'_{ii}$$

En d'autres termes, la loi de commande stable $\hat{k}_{1i}^T$ satisfait $\forall \omega > 0$ et pour $i \in [1, m]$ la condition :

$$|1 + \hat{k}_{1i}^T (-j\omega I_{p_i} - \hat{A}_{1i})^{-1} \hat{b}_i| \geq 1$$

D'après le théorème 2, il existe donc une matrice $\hat{Q}_{1i}$ symétrique non négative telle que la loi de commande

$$v_i = -\hat{k}_{1i}^T \hat{x}_i + w_i$$

minimise pour $i \in [1, m]$

$$\hat{J}_i = \frac{1}{2} \int_0^\infty (\hat{x}_i^T \hat{Q}_{1i} \hat{x}_i + v_i^2) dt$$

Alors il est clair que la loi de commande

$$\underline{v} = -\hat{K}_1 \underline{\hat{x}} + \underline{w}$$

minimise

$$\hat{J} = \frac{1}{2} \int_0^\infty (\underline{\hat{x}}^T \hat{Q}_1 \underline{\hat{x}} + \underline{v}^T \underline{v}) dt$$

compte tenu de (15) et que par construction $\hat{Q}_1$ a la forme (11). Maintenant pour revenir au problème d'optimisation, relatif aux équations (8), il faut retrouver les matrices $\hat{S}$, $\hat{Q}$ et $\hat{R}$, qui sont :

$$\begin{aligned} \hat{S} &= \hat{K} - \hat{K}_1 \\ \hat{Q} &= \hat{Q}_1 + \hat{S}^T \hat{S} \end{aligned}$$

et $\hat{R} = I_m$.

Par construction, ces matrices ont bien la forme (11) souhaitée.

Supposons maintenant que $R'^{-1}S'$ ait une forme quelconque. Alors $\hat{K}_1$ et $\hat{A}_1$ ont une forme également quelconque. Dans ce cas, l'expression (12) ne peut plus être exploitée aussi simplement qu'auparavant, puisque les matrices $[I_m + \hat{K}_1 (\pm sI_n - \hat{A}_1)^{-1} \hat{B}]$ ne sont plus diagonales. Nous allons montrer qu'il est toutefois toujours possible de faire pour $R'^{-1}S'$ le choix précédent.

Evaluons les matrices "différences de retour" en fonction des matrices de transfert des systèmes en boucle fermée $\hat{A}_K$ et $\hat{A}_1$ ($\hat{A}$ est le système en boucle ouverte). Rappelons que :

$$\hat{A}_1 = \hat{A} - \hat{B} R'^{-1} S'$$

$$\hat{A}_K = \hat{A}_1 - \hat{B} \hat{K}_1$$

et posons

$$H_K(s) = H(s, \hat{K}) = c(sI_n - \hat{A}_K)^{-1} \hat{B}$$

$$H_1(s) = H(s, R'^{-1}S') = c(sI_n - \hat{A}_1)^{-1} \hat{B}$$

On démontre alors que (cf. appendice) :

$$H_K^{-1}(s) H_1(s) = [I_m + \hat{K}_1 (sI_n - \hat{A}_1)^{-1} \hat{B}]$$

Cette expression généralise le fait bien connu que, pour les systèmes mono-entrée mono-sortie, la "différence de retour" est le quotient des polynômes caractéristiques des systèmes en boucle fermée et en boucle ouverte.

En reportant cette dernière expression dans (12), et en tenant compte du fait que H_K est diagonale par définition, on obtient :

$$H_1^T(-s) H_K^{-1}(-s) R' H_K^{-1}(s) H_1(s) > R'$$

ou

$$H_K^{-1}(-s) R' H_K^{-1}(s) > H_1^{T-1}(-s) R' H_1^{-1}(s)$$

Réciproquement, tout bouclage $R'^{-1} S'$ qui vérifie cette inégalité vérifie également (12) et par conséquent il existe en vertu du théorème 2, un critère d'optimisation (16) conduisant à $\hat{K}$. En particulier, peut-on choisir $R'^{-1} S'$ de la forme (9) ? Si cette hypothèse est satisfaite, $H_1(s)$ est diagonale et l'inégalité précédente se réduit alors, puisque R' est définie positive, aux m inégalités scalaires suivantes :

$$H_{Ki}^{-1}(-s) H_{Ki}^{-1}(s) > H_{1i}^{-1}(-s) H_{1i}(s)$$

où $H_{Ki}^{-1}(s) (H_{1i}^{-1}(s))$ désigne le $i^{\text{ème}}$ élément de la diagonale de $H_K^{-1}(s) (H_1^{-1}(s))$. Cette dernière forme montre qu'un tel choix pour $R'^{-1} S'$ est toujours possible [cf. [1] Théorèmes 7 et 8], et par conséquent, on ne restreint pas la généralité du problème en choisissant $R'^{-1} S'$ de la forme (9).

Le théorème 2 exprime donc qu'à un système optimal découplé correspond un critère d'optimisation lui-même découplé, c'est-à-dire avec des matrices de pondération du type (11).

Les résultats qui viennent d'être exposés dans ce paragraphe concernent un système en boucle ouverte CD, c'est-à-dire un système déjà découplé. Quelle forme prend le critère si l'on revient au système initial non découplé (19) ?

$$\dot{\underline{x}} = A \underline{x} + B \underline{u}$$

(19)

$$\underline{y} = C \underline{x}$$

Lemme 2 :

Minimiser la fonction de coût (10) par rapport à $\underline{u}$ pour le système CD (8) équivaut à minimiser :

$$J_0 = \frac{1}{2} \int_0^\infty (\underline{x}^T Q_0 \underline{x} + 2 \underline{u}^T S_0 \underline{x} + \underline{u}^T R_0 \underline{u}) dt \quad (20)$$

par rapport à $\underline{u}$ pour le système (19) où :

$$Q_0 = T^T \hat{Q} T + T^T \hat{S} \Lambda^{-1} A^* + A^{*T} \Lambda^{-1} \hat{S}^T T + A^{*T} \Lambda^{-1} \hat{R} \Lambda^{-1} A^*$$

$$S_0 = \Lambda^{-1} D (\hat{S} T + \hat{P} \Lambda^{-1} A^*)$$

$$R_0 = D^T \Lambda^{-1} \hat{P} \Lambda^{-1} D$$

où $\hat{Q}$, $\hat{S}$ et $\hat{R}$ ont la forme (11) et où Λ , D , A^* et T ont les définitions du chapitre 1.

Ce résultat s'obtient en substituant :

$$\underline{v} = \Lambda^{-1} D \underline{u} + \Lambda A^* \underline{x} \quad \text{et} \quad \hat{\underline{x}} = T \underline{x} \quad (T = T_2 T_1) \quad \text{dans (10)}.$$

Conformément aux objectifs fixes dans l'introduction de ce mémoire, cette théorie va maintenant être utilisée selon les étapes suivantes (fig. 3) :

- le système initial est découplé en utilisant un premier bouclage

$$\underline{u} = - D^{-1} A^* \underline{x} + D^{-1} \Lambda \underline{v}$$

- ce nouveau système est mis sous la forme CD (8) en utilisant le changement de base $\hat{\underline{x}} = T \underline{x}$;
- les $\hat{k}_i^T$ sont déterminés en résolvant indépendamment les uns des autres les problèmes d'optimisation définis par (12) et (13) pour $i \in [1, m]$.

D'un point de vue pratique, cette procédure suppose que si on désire changer les performances dynamiques d'une sortie, il suffit de changer la ligne correspondante $\hat{k}_i^T$ de $\hat{K}$, ce qui réduit le problème d'optimisation défini par (19) et (20) à un problème de dimension plus faible. L'un des principaux avantages de cette technique sera donc de permettre l'ajustement en ligne des performances du processus à réguler (cf. chapitre 3).

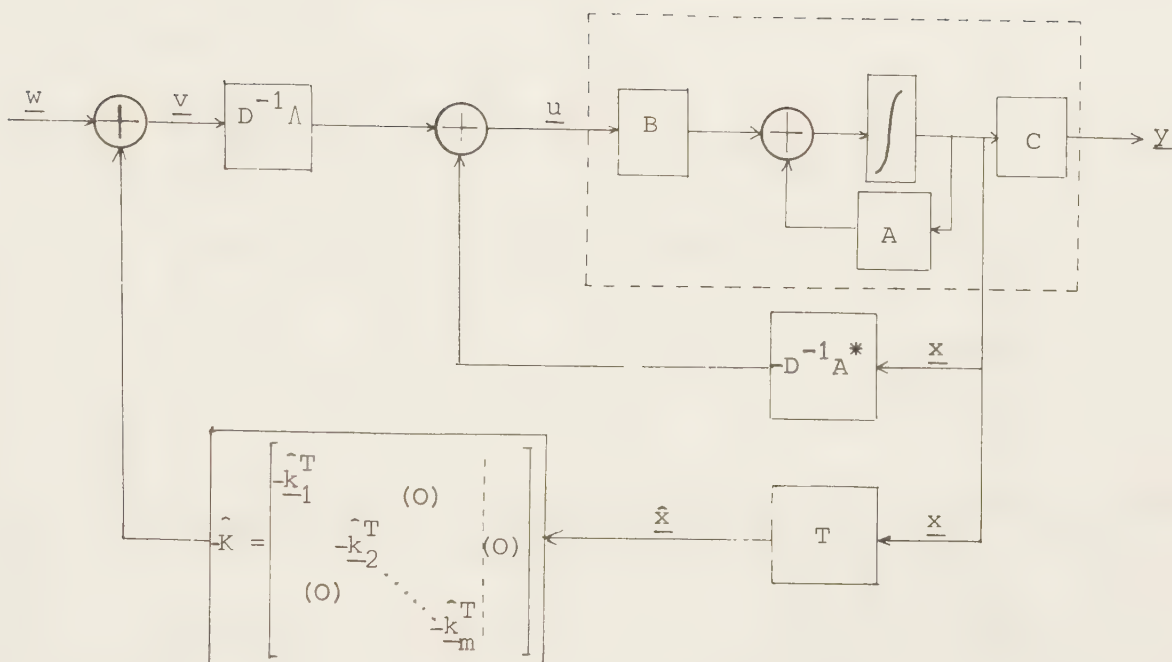


Figure 3

"Représentation schématique d'un système découplé"

5 - DETERMINATION DU BOUCLAGE OPTIMAL $\hat{k}_i^T$ pour un sous-système $(\hat{A}_i, \hat{b}_i, \hat{c}_i^T)$

Les sous-systèmes découplés mis en évidence dans la forme CD (8) ont été définis de façon précise au chapitre 1. Nous nous contenterons donc simplement de rappeler ici quelques unes de leurs propriétés, utiles du point de vue de leur compensation.

5.1 - Rappels de résultats établis au chapitre 1

De façon générale, le sous-système $(\hat{A}_i, \hat{b}_i, \hat{c}_i^T)$ est défini par :

$$\hat{A}_i = \begin{bmatrix} 0 & I_{d_i} & (0) \\ 0 & 0 & (0) \\ \hline \psi_i & \phi_i & \end{bmatrix} \begin{matrix} \left. \begin{matrix} d_{i+1} \\ p_i \end{matrix} \right\} \\ \left. \begin{matrix} r_i \end{matrix} \right\} \end{matrix} \quad \hat{b}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \lambda_i \\ \hline \beta_i \end{bmatrix} \begin{matrix} \left. \begin{matrix} d_{i+1} \\ r_i \end{matrix} \right\} \end{matrix} \quad \hat{c}_i^T = \begin{bmatrix} p_i & 1 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \quad (21)$$

Sa transmittance en boucle ouverte a la forme :

$$\frac{y_i(s)}{v_i(s)} = \frac{\lambda_i \alpha_i(s)}{s^{d_i+1} \alpha_i(s)}$$

avec

$$\alpha_i(s) = \det(sI_{r_i} - \bar{\phi}_i) = s^{r_i} + \alpha_{i1}s^{r_i-1} + \dots + \alpha_{ir_i}$$

Posons

$$\underline{v}_i = -\hat{\underline{k}}_i^T \hat{\underline{x}}_i + w_i$$

alors la transmittance en boucle fermée s'écrit

$$\frac{y_i(s)}{w_i(s)} = \frac{\lambda_i \alpha_i(s)}{\phi_i(s, \sigma_{ij})}$$

$$\text{avec } \phi_i(s, \sigma_{ij}) = s^{p_i} + \sigma_{i1}s^{p_i-1} + \dots + \sigma_{ip_i}$$

où les σ_{ij} sont les coefficients du polynome caractéristique en boucle fermée.
Si on pose

$$\underline{\sigma}_i^T = [\sigma_{ip_i} \quad \sigma_{ip_{i-1}} \quad \dots \quad \sigma_{ip}]$$

alors

$$\underline{\sigma}_i^T = [\hat{\underline{k}}_i^T \underline{V}_i^{-1} + \underline{\pi}_i^T]$$

avec

$$\underline{\pi}_i^T = [\underbrace{0 \dots 0}_{d_{i+1}} \quad \alpha_{ir_i} \quad \dots \quad \alpha_{i1}]$$

et où $\underline{V}_i$ est une matrice régulière qui ne dépend que de $(\hat{\underline{A}}_i, \hat{\underline{b}}_i)$.

5.2 - Compensation des sous-systèmes $(\hat{\underline{A}}_i, \hat{\underline{b}}_i, \hat{\underline{c}}_i^T)$

Plusieurs points de vue peuvent être envisagés pour réaliser cet objectif. Dans ce qui suit, nous cherchons à ajuster les $\hat{\underline{k}}_{ij}$ de $\hat{\underline{k}}_i^T$ de telle sorte que la sortie y_i du système compensé ait des performances indicielles

requis, telles un temps de réponse, un temps de montée, un dépassement, etc..

Deux cas peuvent être envisagés :

a) Les états du système (21) sont tous observables

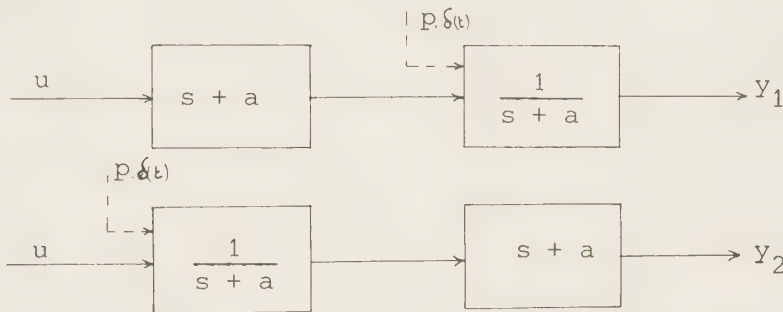
alors $p_i = d_{i+1}$ et (21) se réduit à :

$$\hat{A}_i = \begin{bmatrix} 0 & I_{d_i} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \hat{b}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \lambda_i \end{bmatrix} \quad \hat{c}_i^T = [1 \ 0 \ \dots \ 0]$$

b) Certains états du système (21) sont inobservables

Nous entrons ici dans le domaine où les transmittances ne contiennent plus toute l'information nécessaire à la compréhension du phénomène. De plus, d'un point de vue pratique, il y a lieu d'examiner soigneusement les conséquences dues aux imprécisions de modèle et à la négligence de perturbations.

Prenons un exemple simple de rappel : les deux systèmes suivants ont une transmittance unitaire.



et possèdent un état inobservable qui, selon le signe de a , peut être stable ou instable.

Supposons d'abord qu'il y ait une perturbation impulsionnelle d'aire p (négligée dans la modélisation) à l'entrée du terme $\frac{1}{s + a}$. L'effet de cette perturbation se fera sentir sur y_1 et non sur y_2 . Plaçons-nous dans le cas le plus défavorable (y_1) : si, maintenant, a est positif on pourra sans trop de dommage n'utiliser, pour le calcul du correcteur, que la transmittance unitaire. Par contre, si $a < 0$, on négligerait ainsi un terme en $p e^{-at}$ divergent qui n'aurait aucune chance d'être combattu par l'organe de commande puisque celui-ci aurait été calculé sans connaissance du terme en $\frac{1}{s + a}$.

Le même raisonnement peut être effectué en supposant, et ce sera le cas dans la réalité, que les coefficients a de $s + a$ et $\frac{1}{s + a}$ ne sont pas égaux, ce qui interdit une simplification effective.

La conclusion est donc que si on a affaire à des états inobservables mais stables, on pourra simplifier $\frac{\alpha_i(s)}{s^{d_i+1} \alpha_i(s)}$ sans trop de dommage et ainsi se ramener au cas précédent (a). Si en revanche, on a affaire à des états inobservables instables, il serait dangereux de simplifier par $\alpha_i(s)$ et on devra donc procéder au réglage de la transmittance complète $\frac{\alpha_i(s)}{s^{d_i+1} \alpha_i(s)}$.

Nous traiterons d'abord le problème de la compensation de sous-systèmes composés uniquement d'intégrateurs purs en cascade, et par conséquent sans termes dynamiques au numérateur : $\frac{Y_i(s)}{V_i(s)} = \frac{1}{s^{d_i+1}}$. Ensuite, nous nous placerons dans le cas le plus défavorable c'est-à-dire lorsqu'aucune simplification n'intervient et nous raisonnerons globalement sur (21).

5.2.1 - Compensation d'un système composé d'intégrateurs purs en cascade

Considérons le sous-système défini par (21), et nous supposons sans perte de généralité $\lambda_i = 1$, soit :

$$\hat{A}_i = \begin{bmatrix} 0 & I_{d_i} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \hat{b}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \hat{c}_i^T = [1 \ 0 \ \dots \ 0] \quad (22)$$

et choisissons un critère de performance

$$\hat{J}_i = \frac{1}{2} \int_0^\infty (q_i^2 y_i^2 + v_i^2) dt \quad (23)$$

En fonction des notations précédemment utilisées (23) s'écrit :

$$\hat{J}_i = \frac{1}{2} \int_0^\infty (\hat{x}_i^T \hat{Q}_i \hat{x}_i + v_i^2) dt \text{ avec } \hat{Q}_i = q_i^2 \hat{c}_i \cdot \hat{c}_i^T$$

Pour ce problème d'optimisation particulier, nous allons montrer que la loi de commande $\hat{k}_i^T$ peut être obtenue sans résoudre une équation de Riccati. En effet, soit $T_i(s)$ la différence de retour

$$T_i(s) \stackrel{\Delta}{=} 1 + \frac{\hat{k}_i^T}{p_i} (s I_{p_i} - \hat{A}_i)^{-1} \hat{b}_i$$

Notons $\phi_i(s, \frac{\hat{k}_i^T}{p_i})$ le polynôme caractéristique du système en boucle fermée. Avec cette notation $\phi_i(s, 0)$ désigne le polynôme caractéristique du système en boucle ouverte. On démontre alors [1] que :

$$T_i(s) = \frac{\phi_i(s, \frac{\hat{k}_i^T}{p_i})}{\phi_i(s, 0)}$$

Reportons ce résultat dans la "différence de retour" (cf. §3), qui dans le cas mono-entrée mono-sortie s'écrit :

$$T_i(-s) \cdot T_i(s) = 1 + \frac{\hat{b}_i^T}{p_i} (-s I_{p_i} - \hat{A}_i^T)^{-1} \hat{Q}_i (s I_{p_i} - \hat{A}_i)^{-1} \hat{b}_i$$

On obtient alors, compte tenu des formes particulières de $\hat{A}_i$, $\hat{b}_i$, $\hat{c}_i^T$ et $\hat{Q}_i$:

$$\frac{\phi_i(-s, \frac{\hat{k}_i^T}{p_i}) \cdot \phi_i(s, \frac{\hat{k}_i^T}{p_i})}{(-s)^{p_i} s^{p_i}} = 1 + \frac{q_i^2}{(-s)^{p_i} s^{p_i}}$$

$$\text{ou bien} \quad \phi_i(-s, \frac{\hat{k}_i^T}{p_i}) \cdot \phi_i(s, \frac{\hat{k}_i^T}{p_i}) = s^{2p_i} + (-1)^{p_i} q_i^2 \quad (24)$$

Il est alors clair que les pôles du système optimal sont contenus dans les $2p_i$ racines de l'équation

$$s^{2p_i} + (-1)^{p_i} q_i^2 = 0$$

Cette équation admet $2p_i$ racines, symétriques par rapport à l'axe des imaginaires et qui sont d'autre part situées sur un cercle de rayon q_i^{1/p_i} centré à l'origine du plan en s . Puisque le système optimal est stable, $\phi_i(s, \frac{\hat{k}_i^T}{p_i})$ est une fonction dont les racines sont situées sur le demi-cercle gauche de rayon q_i^{1/p_i} (figure 4).

Cette distribution particulière de pôles confère au système une configuration de Butterworth qui conduit à une réponse transitoire bien amortie et à faible dépassement.

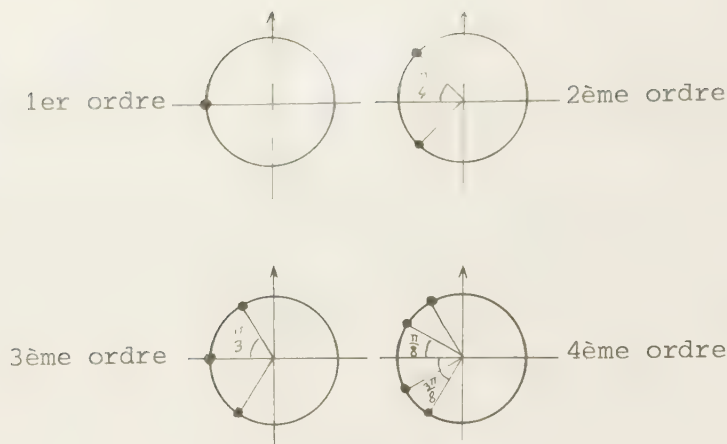


Figure 4

"Configurations de Butterworth"

Un résumé des fonctions de Butterworth jusqu'à l'ordre 4 est donné à la figure 5 et les réponses indicielles correspondantes sont données figure 6 .

Ordre	Polynôme caractéristique	Bouclage
1	$s + q_i$	$[q_i]$
2	$s^2 + 1,414 q_i^{1/2} s + q_i$	$[q_i 1,414$ $q_i^{1/2}]$
3	$(s^2 + q_i^{1/3} s + q_i^{2/3}) \cdot (s + q_i^{1/3})$	$[q_i 2 q_i^{2/3}$ $2 q_i^{1/3}]$
4	$(s^2 + 1,85 q_i^{1/4} s + q_i^{1/2}) \cdot (s^2 + 0,762 q_i^{1/4} s + q_i^{1/2})$	$[q_i 2,612$ $q_i^{3/4}$ $2,705 q_i^{1/2}$ $2,612 q_i^{1/4}]$

Figure 5

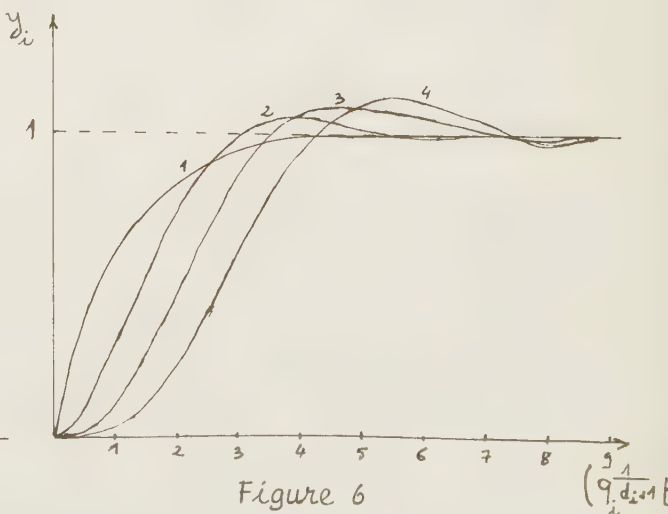


Figure 6

Pour de tels systèmes le temps de réponse (ou de montée) est réglé par $q_i^{1/p}$ et la loi de commande $\hat{k}_1^T$ est aisément calculée à la main (figure 5).

Ce résultat est donc particulièrement important d'un point de vue pratique. Néanmoins pour une configuration de Butterworth le dépassement est fixé. Cette contrainte peut cependant être éliminée en faisant varier la distance entre les pôles tout en conservant une distribution circulaire permettant de régler le temps de réponse par q_i^{1/p_i} . Ceci revient en fait à faire varier les amortissements de polynômes du second ordre qui interviennent dans la fonction $\phi_i(s, \hat{k}_i^T)$ (figure 7).

Avec une telle distribution de pôles il est alors possible de régler à la fois le temps de réponse et le dépassement. D'un point de vue pratique, nous donnons à l'annexe 2 des réseaux de courbes universelles permettant de choisir q_i et les ξ_i en vue d'obtenir le temps de réponse et le dépassement souhaités par l'utilisateur sur la réponse indicielle.

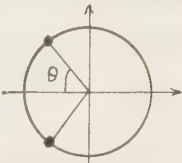
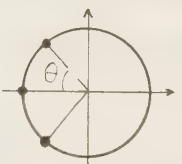
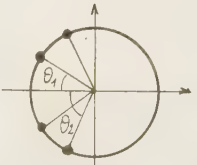
$d_i + 1$	$\underline{k}^T$	Configuration de pôles
2	$[q_i 2\xi \sqrt{q_i}]$	$\xi = \cos \theta$ 
3	$[q_i q_i^{2/3} (1+2\xi)$ $q_i^{1/3} (1+2\xi)]$	$\xi = \cos \theta$ 
4	$[q_i 2(\xi_1 + \xi_2)$ $q_i^{3/4}$ $2(1+2\xi_1 \xi_2) q_i^{1/2}$ $2(\xi_1 + \xi_2) q_i^{1/4}]$	$\xi_1 = \cos \theta_1$ $\xi_2 = \cos \theta_2$ 

Figure 7

Cette méthode peut être considérée comme un algorithme de placement de pôles. Il est toutefois possible de montrer que les configurations de la figure 7 peuvent être obtenues en minimisant des critères du type :

$$\hat{J}_i = \frac{1}{2} \int_0^\infty (\hat{\underline{x}}_i^T \hat{\underline{Q}}_i \hat{\underline{x}}_i + 2 \underline{v}_i^T \underline{s}_i^T \hat{\underline{x}}_i + \underline{v}_i^2) dt \quad (25)$$

Par exemple, pour des systèmes du second et du troisième ordre, on peut choisir :

$$\hat{J}_i = \frac{1}{2} \int_0^\infty \{ \hat{\underline{x}}_i^T \begin{bmatrix} q_i^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \hat{\underline{x}}_i + 2 \underline{v}_i [q_i^2 (1 - 2\xi_i^2) \quad 0] \hat{\underline{x}}_i + \underline{v}_i^2 \} dt$$

$$\text{et} \quad \hat{J}_i = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \left\{ \underline{\hat{x}}_i^T \begin{bmatrix} q_i^2 & 0 & \frac{1}{2} q_i^{4/3} \\ 0 & 4\xi_i^2 q_i^{4/3} & 0 \\ \frac{1}{2} q_i^{4/3} & 0 & 4\xi_i^2 q_i^{2/3} \end{bmatrix} \underline{\hat{x}}_i + 2 v_i \begin{bmatrix} 0 & q_i^{2/3} & 0 \end{bmatrix} \underline{\hat{x}}_i + v_i^2 \right\} dt$$

Pour un système constitué d'intégrateurs purs en cascade, nous avons montré que le problème de la compensation admet une solution simple, en termes de temps de réponse et de dépassement indiciel. Nous allons voir au paragraphe suivant qu'il n'en est plus ainsi lorsque le système possède un numérateur dynamique.

5.2.2 - Compensation d'un sous-système avec numérateur

Pour étudier ce cas, nous nous placerons dans l'hypothèse la plus défavorable, c'est-à-dire lorsque le numérateur a tous ses zéros dans le $\frac{1}{2}$ plan de droite.

D'après le §5.1, la transmittance en boucle ouverte d'un tel sous-système est

$$y_i(s) = \frac{v_i(s)}{s^{d_i+1} \alpha_i(s)} v_i(s)$$

avec $\lambda_i = 1$ et $\alpha_i(s) = s^{r_i} + \alpha_{i1} s^{r_i-1} + \dots + \alpha_{ir_i}$

Un modèle d'état correspondant est donné par

$$\underline{\hat{C}}_i^T = [\alpha_{ir_i} \dots \alpha_{i1} \ 1 \ 0 \dots 0] \quad \underline{\hat{A}}_i' = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ & & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & -\alpha_{ir_i} & \dots & -\alpha_{i1} \end{bmatrix} \quad \underline{\hat{b}}_i' = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Choisissons un critère de performance du type (23), soit :

$$\hat{J}_i = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} (q_i^2 y_i^2 + v_i^2) dt \quad (24)$$

L'équation (24) s'écrit alors :

$$\phi_i(-s, \hat{k}_i^T) \cdot \phi_i(s, \hat{k}_i) = (s^{2(d_i+1)} + (-1)^{d_i+1} q_i^2) \alpha_i(s) \cdot \alpha_i(-s)$$

et les pôles du système optimal sont contenus dans les $2p_i$ racines de l'équation

$$(s^{2(d_i+1)} + (-1)^{d_i+1} q_i^2) \alpha_i(s) \cdot \alpha_i(-s) = 0$$

Par conséquent d_i+1 pôles sont situés sur un demi-cercle de rayon $\frac{1}{d_i+1}$ dans le demi-plan en s gauche et r_i pôles sont confondus avec les racines q_i de l'équation $\alpha_i(-s) = 0$, et ne dépendent donc que du numérateur de la fonction de transfert en boucle ouverte. Il n'est donc plus possible avec un critère du type (23) de modifier à volonté les dynamiques du système, un certain nombre de pôles étant fixé par les coefficients du numérateur.

Pour illustrer ceci considérons l'exemple suivant :

soit
$$y_i(s) = \frac{s - a_i}{s(s - a_i)} \quad \text{avec } a_i > 0$$

on a
$$\hat{c}_i^T = [-a_i \ 1] \quad \hat{A}_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & a_i \end{bmatrix} \quad \hat{b}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

l'équation (32) s'écrit

$$(s^2 - q_i^2) (s^2 - a_i^2) = 0$$

et la transmittance en boucle fermée s'écrit immédiatement

$$y_i(s) = \frac{s - a_i}{(s + q_i)(s + a_i)} v_i(s)$$

résultat que l'on obtient en résolvant de manière classique le problème d'optimisation défini par (21) et (24) : tous calculs faits, on trouve

$$v_i = - [a_i \ q_i]' (2a_i + q_i) \hat{x}_i$$

loi de commande qui conduit bien à la fonction de transfert ci-dessus.

Par conséquent, dans cet exemple q_i règlera de façon correcte le temps

de réponse du système si a_i est largement supérieur à q_i et d'une façon générale on pourra dire que :

"Pour un système avec numérateur, un critère du type (23) permet de régler valablement les dynamiques si et seulement si les pôles dépendant des coefficients du numérateur sont situés très nettement à l'extérieur du $\frac{1}{2}$ cercle de rayon $\frac{1}{d_i+1}$ (figure 8)."

O, Δ : Pôles de $\alpha_i(-s) = 0$

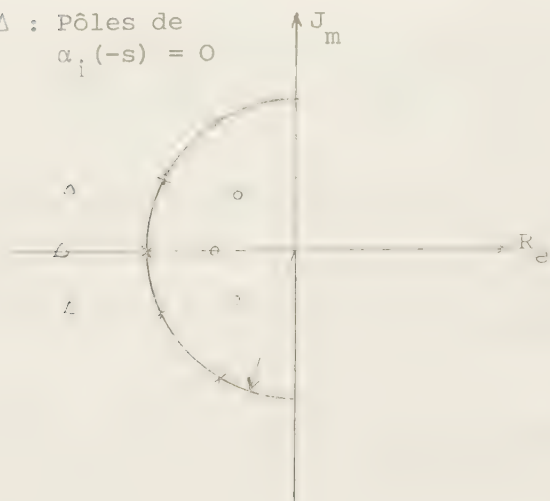


Figure 8

Cette contrainte est assez restrictive et dans la plupart des cas, elle ne pourra être respectée à cause de la physique même du processus.

Elle peut être éliminée en utilisant des "critères à coût croisé" du type (25) qui permettent un placement arbitraire des pôles, et par conséquent un réglage du temps de réponse du système bouclé. Néanmoins, la présence d'un numérateur ne permet

plus de prévoir l'amortissement (les oscillations éventuelles) et il est nécessaire d'étudier chaque cas en simulation pour tenter de déterminer, si elle existe effectivement, la meilleure configuration de pôles possible, c'est-à-dire celle qui conduit à des performances dynamiques sur la sortie, proches de celles souhaitées.

La solution idéale consisterait évidemment à modifier le numérateur de la fonction de transfert pour pouvoir éventuellement se ramener au cas b). Il n'est malheureusement pas possible de réaliser cet objectif à l'aide d'un simple bouclage sur l'état : l'utilisation d'une compensation dynamique plus ou moins complexe peut, dans certains cas, permettre une telle opération.

En fait, dans ce cas, la solution la plus simple pour déterminer le correcteur des sous-systèmes est de recourir aux classiques méthodes fréquentielles. On ne devra cependant pas oublier d'écrire leurs transmittances sous la forme $\frac{\alpha_i(s)}{s^{d_i+1} \alpha'_i(s)}$ avec $\alpha'_i(s)$ différent de $\alpha_i(s)$, sinon ces méthodes provoqueraient la simplification par $\alpha_i(s)$, ce qu'il faut éviter (cf. 5.2 (b)).

6 - CONCLUSION

Nous avons montré dans ce chapitre que le découplage et l'optimisation étaient deux objectifs compatibles, et déterminé une classe particulière des critères quadratiques permettant d'obtenir un système optimal non interactif (lemme 2). Néanmoins, d'un point de vue pratique, il est préférable d'utiliser les résultats du lemme 1 et du théorème 2 et d'opérer en deux étapes :

- a) découpler le système suivant les techniques développées au chapitre 1 ;
- b) optimiser chaque sous-système découplé en utilisant les méthodes du § 5.2.

Pour les sous-systèmes composés exclusivement d'intégrateurs purs en cascade, nous avons mis en évidence des solutions simples permettant de choisir le temps de réponse et le dépassement de la réponse indicielle et qui, de plus, ne nécessitent pas la résolution d'une équation de Riccati. Le cas des sous-systèmes avec numérateur dynamique est plus complexe : nous avons montré en effet que les techniques d'optimisation développées pour les systèmes précédents peuvent conduire dans ce cas à des résultats non satisfaisants.

L'utilisation d'un critère d'optimisation plus complexe ou le recours à des techniques fréquentielles classiques peuvent ici constituer des solutions plus efficaces mais moins immédiates à mettre en oeuvre.

Tout ce que nous avons envisagé précédemment concerne uniquement les systèmes continus, et les résultats qui ont été établis ne peuvent être extrapolés au cas des systèmes discrets sans précautions particulières. La notion d'intégrateur pur en continu est en effet remplacée par celle de retard pur en discret, ce qui change totalement la nature du problème. Nous verrons au chapitre suivant comment traiter le cas des systèmes discrets.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] KALMAN R. E. "When is a linear control system optimal ?"
Journal of basic engineering, Trans of the ASME,
pp. 51-60, March 1964.
- [2] E. KREINDLER "Optimality of linear control systems"
A. JAMESON Trans. Automat. Contr. Vol. 17, pp. 349-351,
June 1972
- [3] A. JAMESON "Inverse problem of linear optimal control"
E. KREINDLER SIAM Journal Control, vol. 11, n°1, pp. 1-19,
February 1973.
- [4] B. D. O. ANDERSON "The testing for optimality of linear systems"
Int. J. Cont. Vol. 4, n° 1, pp. 29-40, 1966.
- [5] A. G. J. Mc FARLANE "Return difference and return ratio matrices
and their use in analysis and design of multi-
variable feedback control systems"
Proc. Inst. Elec. Eng., vol. 117, pp. 2037-2049,
october 1970.
- [6] P. HETRAKUL "Optimal decoupling of linear systems"
T. E. FORTMANN IEEE Trans. Automat. Cont. Vol. 17, pp. 375-377,
June 1972.

APPENDICE

Expression de la matrice "différence de retour" en fonction des matrices de transfert des systèmes en boucle fermée et en boucle ouverte.

Etant donné le système en boucle ouverte :

$$\begin{aligned}\dot{\underline{x}} &= A \underline{x} + B \underline{u} \\ \underline{y} &= C \underline{x}\end{aligned}\quad \text{avec } \dim \underline{y} = \dim \underline{u} \quad (1)$$

et la loi de commande

$$\underline{u} = -K \underline{x} + \underline{w} \quad (2)$$

En boucle fermée, on obtient

$$\begin{aligned}\dot{\underline{x}} &= (A - BK) \underline{x} + B \underline{w} = A_K \underline{x} + B \underline{w} \\ \underline{y} &= C \underline{x}\end{aligned} \quad (3)$$

La matrice de transfert correspondante s'écrit

$$H_K(s) = C(sI_n - A_K)^{-1} B \quad (4)$$

En considérant (1) et (2), nous pouvons écrire :

$$\underline{u}(s) = -K(sI_n - A)^{-1} B \underline{u}(s) + \underline{w}(s)$$

ou

$$\underline{u}(s) = [I_m + K(sI_n - A)^{-1} B]^{-1} \underline{w}(s)$$

et la matrice de transfert relative à (1) compte tenu de (2) peut alors s'écrire :

$$H_K(s) = C(sI_n - A)^{-1} B [I_m + K(sI_n - A)^{-1} B]^{-1}$$

D'où l'on tire que :

$$H_K^{-1}(s) \cdot H(s) = [I_m + K(sI_n - A)^{-1} B]$$

en posant

$$H(s) = C [sI - A]^{-1} B$$

$H(s)$ étant la matrice de transfert du système en boucle ouverte.

CHAPITRE 3

COMMANDE DES SOUS-SYSTÈMES DÉCOUPLÉS : CAS DISCRET

- 1 - Introduction
- 2 - Rappels sur la théorie de la commande optimale
- 3 - Condition nécessaire et suffisante d'optimalité pour une loi de commande K
- 4 - Commande optimale d'un système découplé
- 5 - Détermination du bouclage optimal K_1 pour un sous système découplé
- 6 - Conclusion

Résumé :

On aborde dans ce chapitre la compensation des sous-systèmes discrets découplés, d'un point de vue optimal. Sur le plan théorique, le résultat principal est, comme dans le cas continu, que pour un système découplé, le critère de performance peut lui-même être découplé, ce qui permet de traiter m problèmes d'optimisation indépendants et plus simples. Sur le plan pratique, nous avons été amenés à introduire la notion de système continu équivalent d'un système discret, afin de pouvoir définir pour celui-ci, et par suite de régler, des performances dynamiques classiques comme le temps de réponse et le dépassement indiciels.

1 - INTRODUCTION

Dans le chapitre précédent, nous avons abordé le problème de la compensation des sous systèmes, issus du découplage, dans le cas continu. Nous traiterons dans ce chapitre le cas des systèmes discrets. De nombreuses analogies existent entre ces deux cas, il nous a cependant semblé utile de les distinguer pour plusieurs raisons parmi lesquelles :

- La solution du problème inverse de la commande optimale n'est plus aussi immédiate que dans le cas continu. En particulier, il n'est plus possible d'exprimer d'une manière simple une condition nécessaire et suffisante d'optimalité en utilisant les matrices "différence de retour" [2], comme précédemment.

- La nature des sous systèmes que l'on désire compenser est différente, ceux-ci n'étant plus composés d'intégrateurs purs en cascade mais de retards purs en cascade exclusivement, ce qui écarte la possibilité de trouver des solutions optimales simples qui ne soient pas triviales. Il est donc nécessaire d'utiliser d'emblée des critères à "coût croisé" pour pouvoir obtenir une configuration de pôles donnée.

- Le lien qui existe entre une configuration de pôles et les notions de temps de réponse et de dépassement, que nous avons choisies pour caractériser les dynamiques des sorties du système, apparaît moins immédiat dans le cas discret que dans le cas continu. Ces notions ne prennent en effet de sens que si l'on est capable de connaître l'équation différentielle de la courbe passant par (ou avoisinant au mieux) les points de la réponse indicielle du système discret considéré, autrement dit si on est capable de trouver un système continu équivalent vis-à-vis d'un échelon d'entrée. Il n'est donc plus immédiat de relier directement ces performances classiques aux matrices de pondération du critère.

Ces différences entre les cas discrets et continus, nous ont conduit à modifier notablement le fond de ce troisième chapitre, tout en conservant une forme identique à celle du second pour le plan.

Un rappel des principaux résultats dont la connaissance est nécessaire pour la mise en oeuvre d'une régulation quadratique optimale discrète est effectuée aux § 2 et 3. On démontre notamment au § 3 une condition nécessaire et suffisante d'optimalité, qui servira à établir le résultat principal de ce chapitre, exposé au § 4 : "Tout critère quadratique associé à un système découplé peut lui-même être découplé, sans pour cela restreindre la généralité au problème". On peut alors réduire le problème initial d'optimisation globale à plusieurs problèmes d'optimisation indépendants les uns des autres et relatifs à des systèmes mono entrée-mono sortie de dimensions réduites. Enfin au § 5 nous abordons le problème de la compensation de ces sous systèmes d'un point de vue pratique.

2 - RAPPELS SUR LA THEORIE DE LA COMMANDE OPTIMALE QUADRATIQUE

Par analogie avec le cas continu que nous avons traité au chapitre précédent, nous choisirons des critères quadratiques du même type, c'est-à-dire à coût croisé.

2.1 - Position du problème. Equivalence avec un problème plus classique

Considérons le système linéaire et stationnaire complètement commandable :

$$\underline{x}_{k+1} = A \underline{x}_k + B \underline{u}_k \quad (1)$$

Etant donné un critère de performance J de la forme :

$$J = \frac{1}{2} \sum_0^{\infty} (\underline{x}_k^T Q \underline{x}_k + 2 \underline{u}_k^T S \underline{x}_k + \underline{u}_k^T R \underline{u}_k) \quad (2)$$

où nous supposons :

- Q symétrique définie non négative
- R symétrique définie positive ⁽¹⁾
- Q - S^T R⁻¹ S définie non négative

Le problème de la commande optimale consiste à rechercher une loi de commande

$$\underline{u}_k^* = - K \underline{x}_k \quad (3)$$

qui rende (2) minimum, compte tenu de (1)

Remarque : Comme dans le cas continu, l'hypothèse faite sur S est justifiée par l'équivalence qui existe entre ce problème et un problème plus classique ne comportant pas de coût croisé dans le critère.

Ecrivons :

$$\underline{x}_k^T Q \underline{x}_k + 2 \underline{u}_k^T S \underline{x}_k + \underline{u}_k^T R \underline{u}_k = \underline{x}_k^T (Q - S^T R^{-1} S) \underline{x}_k + (\underline{u}_k + R^{-1} S \underline{x}_k)^T R (\underline{u}_k + R^{-1} S \underline{x}_k)$$

et posons :

$$\underline{u}_{1k} = \underline{u}_k + R^{-1} S \underline{x}_k \quad (4)$$

alors le système (1) s'écrit :

$$\underline{x}_{k+1} = A_1 \underline{x}_k + B \underline{u}_{1k} \quad \text{avec } A_1 = A - B R^{-1} S \quad (5)$$

(1) Dans le cas discret l'hypothèse $R \geq 0$ suffit, néanmoins par analogie avec le cas continu, et pour simplifier la mise en oeuvre pratique, nous supposons $R > 0$.

tandis que (2) se met sous la forme :

$$J = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (\underline{x}_k^T Q_1 \underline{x}_k + \underline{u}_{1k}^T R \underline{u}_{1k}) \text{ avec } Q_1 = Q - S^T R^{-1} S \quad (6)$$

Pour le problème I défini par (1) et (2) et le problème II défini par (5) et (6) il y a donc équivalence en ce sens que :

- Pour un même point de départ les trajectoires optimales sont identiques et les valeurs minimum des critères sont les mêmes.

- Les commandes optimales sont reliées par (4)

Dans ce qui suit, compte-tenu de cette équivalence, nous nous bornerons à rappeler les résultats relatifs au problème II

2.2 - Solution du problème II. On démontre que [1] :

Pour R et Q_1 , définies précédemment, il existe une commande optimale :

$$\underline{u}_{1k} = -(R + B^T \bar{P} B)^{-1} B^T \bar{P} A_1 \underline{x}_k \quad (7)$$

où $\bar{P}$ est le régime permanent de l'équation récurrente de Riccati

$$P_k = A_1^T P_{k+1} A_1 - A_1^T P_{k+1} B (R + B^T P_{k+1} B)^{-1} B^T P_{k+1} A_1 + Q_1$$

"intégrée" à rebours à partir d'une initialisation semi définie positive quelconque. De plus, si la paire (H, A_1) , où H est définie par $Q_1 = H^T H$, est complètement observable, la solution $\bar{P}$ est aussi l'unique solution définie positive de l'équation algébrique

$$P = A_1^T P A_1 - A_1^T P B (R + B^T P B)^{-1} B^T P A_1 + Q_1$$

et la stabilité asymptotique du système en boucle fermée assurée.

3 - PROBLEME INVERSE DE LA COMMANDE OPTIMALE QUADRATIQUE

Pour un système discret linéaire et stationnaire, associé à un critère en temps infini, la loi de commande est elle-même stationnaire, puisque la matrice $\bar{P}$ est constante. Nous allons montrer dans ce paragraphe que, dans ces conditions, il est possible de caractériser le régulateur optimal en utilisant, comme dans le cas continu, des concepts de la théorie de la commande classique, tels que le "gain de boucle" et la "différence de retour". (Il est cependant exclu de parler, dans le cas présent, de techniques fréquentielles).

3.1 - Définitions du "gain de boucle" et de la "différence de retour"

Dans ce qui suit, nous utiliserons les notations suivantes :

$$\Phi(z) = (zI_n - A_1)^{-1}$$

$$\Psi(z) = \det(zI_n - A_1)$$

$$\Psi_k(z) = \det(zI_n - A_1 + BK_1)$$

$$H(z) = C(zI_n - A_1)^{-1}B$$

$$H_k(z) = C(zI_n - A_1 + BK_1)^{-1}B$$

Le "gain de boucle" et la "différence de retour" sont alors définies comme suit :

	Monovariabale	Multivariabale
"Gain de boucle"	$-\underline{k}_1^T \Phi(z) \underline{b}$	$-K_1 \Phi(z) B$
"Différence de retour"	$1 + \underline{k}_1^T \Phi(z) \underline{b}$	$I_m + K_1 \Phi(z) B$

Par ailleurs, on montre [Cf. Appendice 1] que la "différence de retour" est définie de la façon suivante :

Monovariabale	Multivariabale
$\frac{\Psi_k(z)}{\Psi(z)} = 1 + \underline{k}_1^T \Phi(z) \underline{b}$	$H(z) H_k^{-1}(z) = I_m + K_1 \Phi(z) B$

3.2 - Condition nécessaire d'optimalité pour une loi de commande donnée K

Le lien qui existe entre la théorie de la commande classique et la théorie de la commande optimale quadratique est résumé dans le théorème suivant:

Théorème 1 :

Etant donné le système complètement commandable (5) et le critère quadratique (6) pour lequel R est définie positive, si la loi de commande

$$\underline{u}_{1k} = -K_1 \underline{x}_k$$

minimise (6) pour H quelconque, choisie toutefois de telle sorte que (H, A_1) soit complètement observable, alors la condition algébrique suivante est vérifiée par $|z| = 1$

$$[I_m + K_1 \Phi(z) B]^T (R + B^T \bar{P} B) [I_m + K_1 \Phi(z) B] > R$$

où $\bar{P}$ est la solution définie positive de l'équation (9)

Considérons (7) et (9). Soit :

$$K_1 = (R + B^T \bar{P} B)^{-1} B^T \bar{P} A_1 \quad (7)$$

$$\bar{P} = Q_1 + A_1^T \bar{P} A_1 - A_1^T \bar{P} B (R + B^T \bar{P} B)^{-1} B^T \bar{P} A_1 \quad (9)$$

Ajoutons à chaque membre de (9) $z A_1^T \bar{P}$, $z^{-1} \bar{P} A_1$, $A_1^T \bar{P} A_1$,

il vient :

$$(\bar{P} - z^{-1} \bar{P} A_1 - z A_1^T \bar{P} + A_1^T \bar{P} A_1) + z^{-1} \bar{P} A_1 + z A_1^T \bar{P} = Q_1 - A_1^T \bar{P} B (R + B^T \bar{P} B)^{-1} B^T \bar{P} A_1$$

Multiplions maintenant à droite par $\Phi(z) B$ et à gauche par $B^T \Phi^T(z^{-1})$

alors :

$$B^T \bar{P} B + B^T \bar{P} A_1 \Phi(z) B + B^T \Phi^T(z^{-1}) A_1^T \bar{P} B + B^T \Phi(z^{-1}) A_1^T \bar{P} B (R + B^T \bar{P} B)^{-1} \quad (10)$$

$$B^T \bar{P} A_1 \Phi(z) B = B^T \Phi(z^{-1}) Q_1 \Phi(z) B$$

En ajoutant R aux deux membres de cette équation et en tenant compte de (7) on obtient :

$$(R + B^T \bar{P} B) + (R + B^T \bar{P} B) K_1 \Phi(z) B + B^T \Phi(z^{-1}) K_1^T (R + B^T \bar{P} B) \\ + B^T \Phi^T(z^{-1}) K_1^T (R + B^T \bar{P} B) K_1 \Phi(z) B = R + B^T \Phi^T(z^{-1}) Q_1 \Phi(z) B$$

D'où finalement :

$$(I_m + K_1 \Phi(z) B)^T (R + B^T \bar{P} B) (I_m + K_1 \Phi(z) B) = R + B^T \Phi^T(z^{-1}) Q_1 \Phi(z) B \quad (11)$$

La matrice $B^T \Phi^T(z^{-1}) Q_1 \Phi(z) B$ est semi définie positive pour $|z| = 1$ puisque Q_1 est elle semi définie positive et par conséquent :

$$(I_m + K_1 \Phi(z^{-1}) B)^T (R + B^T \bar{P} B) (I_m + K_1 \Phi(z) B) > R \text{ pour } |z| = 1$$

CQFD

Corollaire 1 : Une condition nécessaire pour que la loi de commande K_1 minimise (6), compte tenu de (5), est que l'inégalité suivante soit satisfaite pour $|z| = 1$

$$|\det(I_m + K_1^T(z) B)| > |\det(I_m + R^{-1/2} B^T \bar{P} B R^{-1/2})|^{-1/2}$$

Considérons (11) et prenons le déterminant des deux membres, alors :

$$\det \left\{ (I_m + K_1(z^{-1}) B)^T (I_m + K_1 \Phi(z) B) \right\} = \frac{\det(I_m + R^{-1/2} B^T \Phi^T(z^{-1}) Q_1 \Phi(z) B R^{-1/2})}{\det(I_m + R^{-1/2} B^T \bar{P} B R^{-1/2})}$$

Soit $\rho_i(z)$ les valeurs propres de $T(z) \stackrel{\Delta}{=} I_m + K_1 \Phi(z) B$
 $\alpha_i(z)$ les valeurs propres de $R^{-1/2} B^T \Phi^T(z^{-1}) Q_1 \Phi(z) B R^{-1/2}$
 β_i les valeurs propres de $R^{-1/2} B^T \bar{P} B R^{-1/2}$

Alors :

$$\det (T^T(z^{-1}) \cdot T(z)) = \prod_{i=1}^m |\rho_i(z)|^2 = \frac{\prod_{i=1}^m (1+\alpha_i(z))}{\prod_{i=1}^m (1+\beta_i)}$$

Par définition de $\alpha_i(z)$, $\alpha_i(z) \geq 0$ pour $|z| = 1$ et par conséquent

$$\det (T^T(z^{-1}) \cdot T(z)) > \frac{1}{\prod_{i=1}^m (1+\beta_i)} = \{ \det (I_m + R^{-1/2} B^T \bar{P} B R^{-1/2}) \}^{-1/2}$$

CQFD

Le corollaire 1 exprime par conséquent qu'une condition nécessaire d'optimalité est que le lieu dans le plan complexe de $\det T(z)$, lorsque z parcourt le cercle unité, autrement dit pour $|z| = 1$, ne pénètre pas à l'intérieur du cercle de rayon $\{ \det(I_m + R^{-1/2} B^T \bar{P} B R^{-1/2}) \}^{-1/2}$ (Fig. 2).

Ce résultat généralise pour les système discrets le "critère du cercle" bien connu pour les systèmes continu [2].

Deux différences notables apparaissent cependant entre le cas discret et le cas continu :

- Le rayon du cercle est inférieur à l'unité
- Le rayon du cercle dépend de la matrice $\bar{P}$

Cette dernière remarque justifie par ailleurs que le "critère du cercle" ne constitue, à l'heure actuelle, dans le cas discret qu'une condition nécessaire d'optimalité. Nous allons toutefois montrer, dans le cas monovarié, qu'en s'imposant des conditions supplémentaires, il constitue également une condition suffisante d'optimalité.

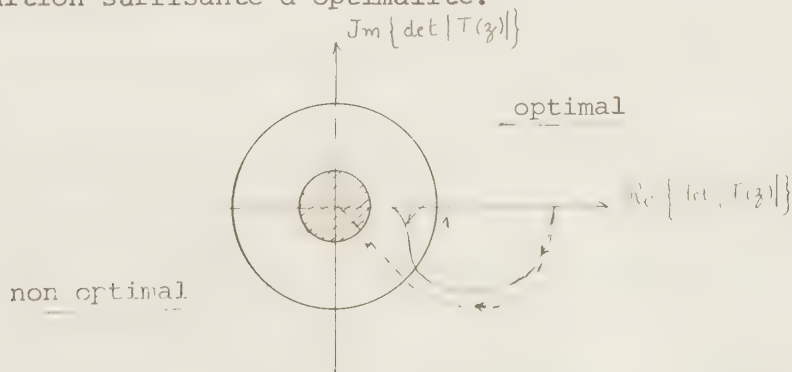


Figure 2 : Lieu de Nyquist optimal dans le cas discret

3.3 - Cas particulier des systèmes monovariables

Pour un système monovariante la relation (11) s'écrit :

$$\left[1 + \underline{k}_1^T \Phi(z^{-1}) \underline{b}\right]^T (r + \underline{b}^T \underline{P} \underline{b}) \left[1 + \underline{k}_1^T \Phi(z) \underline{b}\right] = r + \underline{b}^T \Phi^T(z^{-1}) Q_1 \Phi(z) \underline{b} \quad (13)$$

D'autre part, puisque la paire $(A_1, \underline{b})$ est complètement commandable par hypothèse, nous supposons, sans restreindre la généralité du problème, que le système est sous "Forme canonique à variables de phase".

Démontrons tout d'abord le résultat préliminaire suivant :

Lemme 1 : Si la paire (H, A_1) est observable alors la loi de commande optimale $\underline{k}_1^T$ est elle-même observable.

Rappelons tout d'abord que la condition :

" (H, A_1) (resp. $(\underline{k}_1^T, A_1)$) observable"

est équivalente à la condition :

"Les fractions rationnelles de $H\Phi(z)\underline{b}$ (resp. $\underline{k}_1^T \Phi(z)\underline{b}$) ont des numérateurs et des dénominateurs" qui n'ont pas de zéros communs, [3] , [4].

Par définition de la "différence de retour" (13) peut encore s'écrire :

$$(r + \underline{b}^T \underline{P} \underline{b}) \frac{\Psi_k(z^{-1}) \cdot \Psi_k(z)}{\Psi(z^{-1}) \cdot \Psi(z)} - r = \underline{b}^T \Phi^T(z^{-1}) H^T H \Phi(z) \underline{b}$$

Par conséquent, si $H\Phi(z)\underline{b}$ satisfait la condition d'observabilité, les polynômes $\Psi_k(z)$ et $\Psi(z)$ sont premiers entre eux, ce qui implique, étant donné que $\frac{\Psi_k(z)}{\Psi(z)} = 1 + \underline{k}_1^T \Phi(z)\underline{b}$ que $\underline{k}_1^T \Phi(z)\underline{b}$ satisfait la condition d'observabilité.

CQFD

Dans ces conditions, on montre que :

Lemme 2 : Toute loi de commande optimale, vis-à-vis du critère (6), pour le système monovariante (5) peut être obtenu avec $Q_1 = \underline{h} \underline{h}^T$ où rang $\underline{h}=1$.

D'après les résultats du paragraphe 2, on a : $\underline{k}_1^T = \frac{\underline{b}^T \underline{P} \underline{A}_1}{r + \underline{b}^T \underline{P} \underline{b}}$

Par définition :

$$\underline{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & 1 \\ -a_n & \dots & \dots & \dots & -a_1 \end{bmatrix} \quad \underline{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Posons .

$$\bar{P} = \begin{bmatrix} \bar{P}_0 & \bar{p}_{1n} & \bar{p}_{2n} & \dots & \bar{p}_{nn} \\ \bar{p}_{1n} & \bar{p}_{2n} & \dots & \dots & \bar{p}_{nn} \end{bmatrix}$$

où $\bar{P}_0$ est une matrice symétrique telle que $\bar{P}$ soit définie positive.

Alors $\underline{k}_1^T$ est donné par

$$\underline{k}_1^T \triangleq [k_n \dots k_1] = \frac{[-a_n \bar{p}_{nn} : \bar{p}_{1n} - a_{n-1} \bar{p}_{nn} : \dots : \bar{p}_{n-1, n} - a_1 \bar{p}_{nn}]}{r + \bar{p}_{nn}} \quad (14)$$

Remplaçons la "différence de retour" par sa définition dans (13).

Soit :

$$(r + \bar{p}_{nn}) \frac{\Psi_k(z^{-1}) \cdot \Psi_k(z)}{\Psi(z^{-1}) \cdot \Psi(z)} = r + \underline{b}^T \Phi^T(z^{-1}) Q_1 \Phi(z) \underline{b}$$

et calculons $\underline{b}^T \Phi^T(z^{-1}) Q_1 \Phi(z) \underline{b}$

$$\underline{b}^T \Phi^T(z^{-1}) Q_1 \Phi(z) \underline{b} = \frac{(r + \bar{p}_{nn}) \Psi_k(z^{-1}) \cdot \Psi_k(z) - r \Psi(z^{-1}) \cdot \Psi(z)}{\Psi(z) \cdot \Psi(z^{-1})} \quad (15)$$

Compte tenu des définitions précédentes

$$\begin{aligned} \Psi(z) &= z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n \\ \Psi_k(z) &= z^n + (a_1 + k_1) z^{n-1} + \dots + a_n + k_n \end{aligned}$$

En remplaçant $\Psi(z)$ et $\Psi_k(z)$ par leurs valeurs dans (15) et en tenant compte du fait que :

$$k_n = - \frac{a_n \bar{p}_{nn}}{r + \bar{p}_{nn}}$$

On trouve que :

$$\underline{b}^T \Phi^T(z^{-1}) Q_1 \Phi(z) \underline{b} = \frac{N(z)}{\Psi(z) \cdot \Psi(z^{-1})}$$

où $N(z)$ est un polynôme dont le terme de plus haut degré est d'ordre $n-1$ et le terme de plus bas degré $(1-n)$. De plus, puisque le numérateur du membre de gauche est un polynôme non négatif, il peut toujours se factoriser en $\Gamma(z^{-1}) \cdot \Gamma(z)$. En effet : Si on utilise la transformée en w , c'est-à-dire si on pose $z = \frac{1+w}{1-w}$

avec $w = j\omega$ (1), le numérateur de $\underline{b}^T \Phi^T(z^{-1}) Q_1 \Phi(z) \underline{b}$ est un polynôme non négatif

(1) ω joue donc le rôle d'une pulsation fictive, et varie de zéro à l'infini.

en v^2 . Kalman a démontré ([3], lemme 3) qu'un tel polynome peut toujours se factoriser de "façon unique" en $v(jv) \cdot v(-jv)$ c'est-à-dire en $v(w) \cdot v(-w)$ en imposant à $v(w)$ d'avoir toutes ses racines situées dans le demi-plan complexe gauche. En remplaçant maintenant w par $\frac{1-z}{1+z}$ on obtient le résultat souhaité à savoir :

$$N(z) = \Gamma(z^{-1}) \cdot \Gamma(z)$$

où $\Gamma(z)$ est un polynome de degré n dont les racines sont toutes situées à l'intérieur du cercle de rayon unité.

D'autre part, étant donné la forme choisie pour A_1 et $\underline{b}$

$$\underline{h}^T \begin{bmatrix} 1 \\ z \\ \vdots \\ z^{n-1} \end{bmatrix} \times \frac{1}{\Psi(z)}$$

Remarque : Le choix que nous venons d'effectuer pour $\underline{h}$, satisfait automatiquement la condition : " $(\underline{h}^T, A_1)$ observable". En effet, dire que $(\underline{h}^T, A_1)$ est "observable" équivaut à dire que la fraction rationnelle $\underline{h}^T \Phi(z) \underline{b}$ a "un numérateur et un dénominateur qui n'ont aucun zéro commun". Or par une démonstration analogue à celle du lemme 1, on montre que cette condition est toujours vérifiée parce que $\underline{k}_1^T$ est une loi de commande observable.

En définitive, le lemme (2) exprime que si une loi de commande $\underline{k}_1^T$ optimale et observable, pour le système monovariable (5), vis-à-vis du critère (6), est obtenue avec Q_1 quelconque, la même loi de commande peut être obtenue en imposant à Q_1 la forme $\underline{h} \underline{h}^T$.

Nous pouvons maintenant énoncer :

Théorème 2 : Etant donné le système monovariable complètement commandable (5) et le critère quadratique (6) pour lequel $r > 0$, la loi de commande :

$$u_{1k} = - \underline{k}_1^T \underline{x}_k$$

minimise (6) pour $\underline{h}$ quelconque, choisi toutefois de telle sorte que la paire $(\underline{h}^T, A_1)$ soit observable, si et seulement si :

- $\underline{k}_1^T$ est une loi de commande observable stable pour (5)
- Il existe une matrice P symétrique définie positive telle que la relation suivante soit vérifiée pour $|z| = 1$

$$(r + \underline{b}^T P \underline{b}) [1 + \underline{k}_1^T \Phi(z) \underline{b}]^2 > r \quad (16)$$

$$\text{et avec } \underline{k}_1^T = \frac{\underline{b}^T P A_1}{r + \underline{b}^T P \underline{b}} \quad (17)$$

La condition nécessaire a été démontrée au théorème 1.

Démontrons la conditions suffisante :

$\underline{k}_1^T$ est une loi de commande observable stable pour (5), et telle que (16) et (17) soient vérifiées avec $r > 0$ donné. Alors en utilisant un procédé de factorisation analogue à celui utilisé pour démontrer le lemme 2, on montre qu'il existe $\underline{h}$ tel que :

$$(r + \underline{b}^T P \underline{b}) (1 + \underline{k}_1^T \Phi(z^{-1}) \underline{b})^T (1 + \underline{k}_1^T \Phi(z) \underline{b}) = r + \underline{b}^T \Phi^T(z^{-1}) \underline{h} \underline{h}^T \Phi(z) \underline{b} \quad (18)$$

et tel que la paire $(\underline{h}^T, A_1)$ soit observable.

Inversement, A_1 , r et $\underline{h}^T$ étant donnés, la solution du problème d'optimisation correspondant est :

$$u_{1k}^* = - \underline{k}_1^{*T} \underline{x}_k \quad \text{avec } \underline{k}_1^{*T} = \frac{\underline{b}^T \bar{P}}{r + \underline{b}^T \bar{P} \underline{b}}$$

où $\bar{P}$ est solution de (9).

Compte tenu du théorème 1

$$(r + \underline{b}^T \bar{P} \underline{b}) (1 + \underline{k}_1^{*T} \Phi(z^{-1}) \underline{b})^T (1 + \underline{k}_1^{*T} \Phi(z) \underline{b}) = r + \underline{b}^T \Phi^T(z^{-1}) \underline{h} \underline{h}^T \Phi(z) \underline{b} \quad (19)$$

En comparant (18) et (19) on en déduit :

$$(r + \underline{b}^T \bar{P} \underline{b}) (1 + \underline{k}_1^{*T} \Phi(z^{-1}) \underline{b})^T (1 + \underline{k}_1^{*T} \Phi(z) \underline{b}) = (r + \underline{b}^T P \underline{b}) (1 + \underline{k}_1^T \Phi(z^{-1}) \underline{b})^T (1 + \underline{k}_1^T \Phi(z) \underline{b})$$

Par conséquent, si on montre que $p_{nn} = p_{nn}$ la condition suffisante sera démontrée puisque, étant donné la forme canonique utilisée, (20) exprimera alors que :

$$\underline{k}_1^* = \underline{k}_1^{*T}$$

$\underline{k}_1^{*T}$ est une loi de commande optimale alors (10) est vérifiée. Soit :

$$\underline{b}^T \underline{\bar{P}} \underline{b} + \underline{b}^T \underline{\bar{P}} \underline{A}_1 \phi(z) \underline{b} + \underline{b}^T \phi^T(z^{-1}) \underline{A}_1^T \underline{\bar{P}} \underline{b} + \underline{b}^T \phi^T(z^{-1}) \underline{A}_1^T \underline{\bar{P}} \underline{b} \underline{b}^T \underline{\bar{P}} \underline{A}_1 \phi(z) \underline{b} = \underline{b}^T \phi^T(z^{-1}) \underline{h} \underline{h}^T \phi(z) \underline{b} \quad (20)$$

D'autre part, à partir de (18) et compte-tenu de (19) on peut également écrire une relation identique avec P :

$$\underline{b}^T \underline{P} \underline{b} + \underline{b}^T \underline{P} \underline{A}_1 \phi(z) \underline{b} + \underline{b}^T \phi^T(z^{-1}) \underline{A}_1^T \underline{P} \underline{b} + \underline{b}^T \phi^T(z^{-1}) \underline{A}_1^T \underline{P} \underline{b} \underline{b}^T \underline{P} \underline{A}_1 \phi(z) \underline{b} = \underline{b}^T \phi^T(z^{-1}) \underline{h} \underline{h}^T \phi(z) \underline{b} \quad (21)$$

De (10) et (21) on déduit que :

$$\underline{b}^T \underline{P} \underline{b} + \underline{b}^T \underline{P} \underline{A}_1 \phi(z) \underline{b} + \dots = \underline{b}^T \underline{\bar{P}} \underline{b} + \underline{b}^T \underline{\bar{P}} \underline{A}_1 \phi(z) \underline{b} + \dots \quad (22)$$

En tenant compte de la forme particulière de $\phi(z) \underline{b}$ et en multipliant les deux membres de (22) par $\psi(z^{-1}) \cdot \psi(z)$ on obtient :

$$\underline{\bar{p}}_{nn} \psi(z) \cdot \psi(z^{-1}) + \bar{v}(z) \psi(z^{-1}) + \bar{v}(z^{-1}) \psi(z) + \bar{v}(z^{-1}) \cdot \bar{v}(z) = \quad (23)$$

$$p_{nn} \psi(z) \cdot \psi(z^{-1}) + v(z) \psi(z^{-1}) + v(z^{-1}) \cdot \psi(z) + v(z) \cdot v(z^{-1})$$

avec $v(z)$ (Respectivement $\bar{v}(z)$) :

$$v(z) = a_n p_{nn} + (p_{1n} - a_{n-1} p_{nn}) z + \dots + (p_{n-1,n} - a_1 p_{nn}) z^{n-1}$$

On peut alors écrire (23) sous la forme :

$$-a_n \bar{p}_{nn} z^n + \text{termes en } (z^{n-1}, \dots, z^{-n}) = -a_n p_{nn} z^n + \text{termes en } (z^{n-1}, \dots, z^{-n})$$

et puisque (23) doit être vérifiée quel que soit z , il est clair que :

$$p_{nn} = \bar{p}_{nn}$$

CQFD

Remarque : Nous venons de montrer que si les relations (16) et (17) sont satisfaites, la loi de commande $\underline{k}_1^T$ est optimale vis-à-vis d'un critère (6) en r et $\underline{h} \underline{h}^T$, mais ceci n'implique nullement que les matrices P et $\bar{P}$ soient identiques : seules la dernières lignes et la dernière colonne le sont respectivement. A la limite, la condition P définie positive peut être abandonnée au profit de $p_{nn} > 0$.

3.4 - Solution du problème inverse de la commande optimale pour un système monovariable

Jusqu'à présent, nous avons raisonné, compte tenu de l'équivalence établie au § 2, sur le problème II (système (5) + critère (6)). Revenons maintenant au problème I (système 1 + critère 2), pour établir le résultat suivant.

Théorème 3 : Toute loi de commande $\underline{k}_1^T$ observable et stable pour le système (1) est optimale vis-à-vis d'un critère du type 2.

Nous supposons pour faire cette démonstration que le système est comme précédemment sous forme canonique. La loi de commande $\underline{k}_1^T$ est donnée, et par conséquent $\Psi_k(z)$ est connu :

$$\Psi_k(z) \triangleq \det (zI_n - A + \underline{b} \underline{k}_1^T)$$

Deux cas peuvent se présenter :

- Le système initial en boucle ouverte satisfait la condition de positivité du théorème 2, alors il existe un critère quadratique sans "coût croisé" pour lequel $\underline{k}_1^T$ est une loi de commande optimale.
- Le système initial en boucle ouverte ne vérifie pas cette condition.

Le problème se pose alors de la façon suivante :

Existe-t-il une loi de commande $\underline{s}^T$, un scalaire $r > 0$ et une matrice $P = P^T > 0$, tels que les relations suivantes soient satisfaites :

$$\left| 1 + (\underline{k}_1^T - \underline{s}^T) (zI_n - A_s)^{-1} \underline{b} \right|^2 > \frac{r}{r + \underline{b}^T P \underline{b}} \quad |z| = 1 \quad (24)$$

$$\underline{k}_1^T - \underline{s}^T = \frac{\underline{b}^T P A_s}{r + \underline{b}^T P \underline{b}} \quad (25)$$

$$\text{avec } A_s = A - \underline{b} \underline{s}^T$$

En bref, peut-on à partir de A construire un nouveau système A_s , pour lequel on puisse appliquer le "critère du cercle" précédent et de telle sorte que :

$$\det [zI_n - A_s + \underline{b} (\underline{k}_1^T - \underline{s}^T)] = \Psi_k(z)$$

Compte tenu de la définition de la "différence de retour", on peut encore écrire (24) sous la forme

$$\frac{\Psi_k(z^{-1}) \cdot \Psi_k(z)}{\Psi_s(z^{-1}) \cdot \Psi_s(z)} > \frac{r}{r + \underline{b}^T P \underline{b}} = \rho^2 \quad (26)$$

Posons :

$$\begin{aligned} \Psi_k(z) &= z^n + \alpha_1 z^{n-1} + \dots + \alpha_n & \alpha_i &\triangleq a_i + k_i \\ \Psi_s(z) &= z^n + \beta_1 z^{n-1} + \dots + \beta_n & \beta_i &\triangleq a_i + s_i \end{aligned}$$

Lemme 3 : Pour qu'il existe une solution optimale, il faut que la relation suivante soit vérifiée.

$$\alpha_n = \beta_n \rho^2 \quad (27)$$

En effet, pour qu'il existe une solution optimale, il faut que le polynôme

$$\psi_k(z^{-1}) \cdot \psi_k(z) - \rho^2 \psi_s(z^{-1}) \cdot \psi_s(z)$$

soit au plus de degré $n-1$, condition qui implique nécessairement (27).

Supposons cette condition vérifiée, alors le polynôme précédent peut s'écrire :

$$\psi_k(z) \cdot \psi_k(z^{-1}) - \rho^2 \psi_s(z) \cdot \psi_s(z^{-1}) = \mu_1 + \mu_2(z+z^{-1}) + \dots + \mu_n(z^{n-1} + z^{1-n})$$

où les paramètres μ_i sont fonction des α_i (connus) et des β_i (inconnus). Il est donc toujours possible théoriquement de choisir les n coefficients β_i de telle sorte que (28) soit un polynôme non négatif, et tel que β_n vérifie de plus la condition $|\beta_n| > |\alpha_n|$ puisque ρ^2 doit être inférieur à l'unité. Néanmoins dans la pratique, ce choix sera d'autant plus difficile que n est grand puisque les conditions générales de positivité d'un polynôme d'ordre quelconque ne sont pas connues, à l'heure actuelle, explicitement [3].

Les paramètres β_i étant déterminés, on en déduit facilement les coefficients $p_{1n}, p_{1n}, \dots, p_{n-1,n}$ de P par la relation (25), le coefficient p_{nn} étant déterminé pour sa part par la connaissance de ρ^2 .

Les conditions (25) et (26) étant satisfaites, il existe d'après le théorème 2, un vecteur $\underline{h}$ tel que le critère :

$$\frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} (\underline{x}_k^T \underline{h} \underline{h}^T \underline{x}_k + r u_{1k}^2)$$

compte tenu de

$$\underline{x}_{k+1} = \underline{A}_s \underline{x}_k + \underline{b} u_{1k}$$

conduise à la loi de commande

$$u_{1k} = (\underline{k}^T - \underline{s}^T) \underline{x}_k$$

Posons alors :

$$u_k = - \underline{k}^T \underline{x}_k$$

On en déduit :

$$u_{1k} = \underline{u}_r + \underline{s}^T \underline{x}_k$$

Reportons cette valeur de u_{1k} dans le ceitère précédent. On obtient :

$$\frac{1}{2} \sum_0^{\infty} \{ \underline{x}_k^T (\underline{h} \underline{h}^T + r^{-1} \underline{s} \underline{s}^T) \underline{x}_k + 2u_k \underline{s}^T \underline{x}_k + ru_k^2 \}$$

Le théorème 3 est donc démontré.

Remarque : La matrice P n'est jusqu'à présent pas complètement définie puisque nous n'avons déterminé que n coefficients sur $\frac{n(n+1)}{2}$ (P est symétrique). Pour construire la matrice P_0 qui nous manque, on peut opérer de la façon suivante :

Soit W une matrice constituée de vecteurs de base du noyau de $\underline{b}, \mathcal{N}(\underline{b})$ ($\underline{b}^T W = 0$). Alors par définition de W

$$W^T \cdot W = \begin{bmatrix} \underline{W}_0^T \cdot \underline{W}_0 & \vdots \\ \vdots & \vdots \\ 0 & \dots \dots \dots 0 \end{bmatrix} \quad \text{d'où } P_0 = \underline{W}_0^T \cdot \underline{W}_0$$

$$\text{et finalement } P = \begin{bmatrix} P_0 & p_{1n} \\ \vdots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots \\ p_{1n} & p_{2n} \dots \dots \dots E_{nn} \end{bmatrix}$$

De plus, il est toujours possible de choisir $\underline{W}_0$ de telle sorte que P soit définie positive.

Afin d'illustrer par un exemple ce paragraphe 3, nous avons traité à l'appendice 2 le cas d'un système du second ordre pour lequel des calculs à la main sont encore possibles.

4 - COMMANDE OPTIMALE D'UN SYSTEME DECOUPLE -

Considérons le système ID, complètement commandable, mis sous forme CD (Cf. Chapitre 1)

$$\begin{aligned} \hat{\underline{x}}_{k+1} &= \hat{A} \hat{\underline{x}}_k + B \underline{v}_k \\ \underline{y}_k &= C \hat{\underline{x}}_k \end{aligned} \quad (28)$$

avec

$$\hat{\underline{x}}_k = \begin{bmatrix} \hat{x}_1 \\ \hat{x}_2 \\ \vdots \\ \hat{x}_m \\ \hat{x}_{m+1} \end{bmatrix}_k \quad \hat{A} = \begin{bmatrix} \hat{A}_1 & & & & \\ & \hat{A}_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ & (0) & & \hat{A}_m & \\ & & & & \hat{A}_{m+1} \end{bmatrix} \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} \hat{b}_1 & & & & \\ & \hat{b}_2 & & & \\ & & \ddots & & \\ (0) & & & \hat{b}_m & \\ \hat{b}_1^c & \dots & \hat{b}_m^c \end{bmatrix} \quad \hat{C} = \begin{bmatrix} \hat{C}_1^T & & & & \\ & \hat{C}_2^T & & & \\ & & \ddots & & \\ (0) & & & \hat{C}_m^T & \\ & & & & (0) \end{bmatrix}$$

où $\hat{\underline{x}}_i$, $\hat{\underline{b}}_i$, $\hat{\underline{c}}_i$ sont des vecteurs de dimensions p_i , $\hat{A}_i$ est une matrice $p_i \times p_i$ pour $i \in [1, m]$

La classe de toutes les lois de commande qui découplent (28) a été caractérisée au chapitre 1 (th. 5) comme suit : le système CD (18) reste découplé sous l'action d'un bouclage supplémentaire du type :

$$\underline{v}_k = - \hat{K} \underline{x}_k + \underline{w}_k \quad \dim \underline{w}_k = \dim \underline{v}_k$$

si et seulement si $\hat{K}$ a la forme suivante :

$$\hat{K} = \begin{bmatrix} \hat{k}_1^T & & & & \\ & \hat{k}_2^T & & & \\ & & \ddots & & \\ (0) & & & \hat{k}_m^T & \\ & & & & (0) \end{bmatrix} \quad (29)$$

où $\hat{k}_i$ est un vecteur de dimension p_i pour $i \in [1, m]$

La loi de bouclage $\hat{K}$ peut être choisie de façon optimale :

Théorème 4 : Etant donné le système CD (28) et le critère

$$\hat{J} = \frac{1}{2} \sum_0^\infty (\hat{\underline{x}}_k^T \hat{Q} \hat{\underline{x}}_k + 2 \underline{v}^T \hat{S} \hat{\underline{x}}_k + \underline{v}_k^T \hat{R} \underline{v}_k) \quad (30)$$

où $\hat{R}$ est définie positive, $\hat{Q}$ et $\hat{Q} - \hat{S}^T \hat{R}^{-1} \hat{S}$ sont définies non négatives. Alors si $\hat{R}$, $\hat{Q}$ et $\hat{S}$ ont la forme suivante

$$\hat{R} = \text{diag}(\hat{r}_i) \quad \hat{Q} = \begin{bmatrix} \hat{Q}_1 & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & \dots & \hat{Q}_m & 0 \end{bmatrix} \quad \hat{S} = \begin{bmatrix} \hat{s}_1^T & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & \dots & \hat{s}_m^T & (0) \end{bmatrix}$$

où $\hat{r}_i$ est un scalaire, $\hat{Q}_i$ une matrice $p_i \times p_i$ un vecteur de dimension p_i pour $i \in [1, m]$, la loi de commande, obtenue en résolvant ce problème d'optimisation, a la forme (29).

De plus toute loi de commande observable et stable pour le système (28) peut être obtenue à partir d'un critère quadratique défini par (30) et (31).

En effet, si $\hat{R}$, $\hat{Q}$ et $\hat{S}$ ont effectivement la forme (31), il est clair que le problème d'optimalisation, défini par (28) et (30), se réduit à m problèmes d'optimalisation indépendants les uns des autres définis par :

$$\begin{aligned}\hat{\underline{x}}_{i,k+1} &= \hat{A}_i \underline{x}_{i,k} + \hat{b}_i v_{i,k} \\ y_{i,k} &= \hat{C}_i^T \hat{\underline{x}}_{i,k} \\ J_i &= \frac{1}{2} \sum_0^{\infty} (\hat{\underline{x}}_{i,k}^T \hat{Q}_i \hat{\underline{x}}_{i,k} + 2 v_{i,k} \hat{S}_i^T \hat{\underline{x}}_{i,k} + \hat{r}_i v_{i,k}^2)\end{aligned}$$

La solution de ce problème est :

$$v_{i,k} = \hat{k}_i^T \hat{\underline{x}}_{i,k} + w_{i,k}$$

où $\hat{k}_i^T$ est un vecteur de dimension p_i , obtenu en résolvant une équation de Riccati d'ordre p_i (cf. § 2).

Donc si $\hat{R}$, $\hat{Q}$, $\hat{S}$ ont la forme (31), la matrice de bouclage, solution du problème d'optimalisation définie par (28) et (30) a la forme (29) et par conséquent maintient le découplage.

De plus, d'après le théorème 3, toutes les lois de commandes observables et stables qui découplent (28) peuvent être obtenues avec des critères du type (30). Par conséquent nous pouvons affirmer que si un critère quadratique, avec Q , S et R quelconques, conduit à une loi de commande du type (29), la même loi de commande peut être obtenue à partir d'un critère du type (30) où les matrices $\hat{Q}$, $\hat{R}$ et $\hat{S}$ ont la forme particulière (31).

Le théorème 4 exprime donc qu'à un système optimal découplé correspond un critère lui-même découplé.

Les résultats qui viennent d'être exposés dans ce paragraphe concernent un système en boucle ouverte CD, c'est-à-dire un système déjà découplé. Quelle forme prend le critère si on revient au système initial non découplé (32)?

$$\begin{aligned}\underline{x}_{k+1} &= A \underline{x}_k + B \underline{u}_k \\ y_k &= C \underline{x}_k\end{aligned}\tag{32}$$

Lemme 3 .

Minimiser la fonction de coût (30) par rapport à v_k pour le système CD (28) équivaut à minimiser

$$J_0 = \frac{1}{2} \sum_0^{\infty} (\underline{x}_k^T Q_0 \underline{x}_k + 2 \underline{u}_k^T S_0 \underline{x}_k + \underline{u}_k^T R_0 \underline{u}_k)\tag{33}$$

rapport à $\underline{u}_k$ pour le système (32) où :

$$Q_0 = T^T Q T + T^T \hat{S} \Lambda^{-1} A^* + A^{*T} \Lambda^{-1} \hat{S}^T + \hat{A}^{*T} \Lambda^{-1} \hat{R} \Lambda^{-1} A^*$$

$$S_0 = \Lambda^{-1} D (\hat{S}^T + \hat{R} \Lambda^{-1} A^*)$$

$$R_0 = D^T \Lambda^{-1} \hat{R} \Lambda^{-1} D$$

où $\hat{Q}$, $\hat{S}$ et $\hat{R}$ ont la forme (31) et où Λ , D , A^* et T ont les définitions du chapitre 1.

Ce résultat s'obtient en substituant

$$\underline{v}_k = - D^{-1} A^* \underline{u}_k + \Lambda A^* \underline{x}_k \quad \text{et} \quad \hat{\underline{x}}_k = T \underline{x}_k \quad (T = T_2 \cdot T_1) \quad \text{dans (30).}$$

Comme dans le cas continu, cette théorie va maintenant être utilisée selon les étapes suivantes (Fig. 1) :

- Le système initial est découplé en utilisant un premier bouclage

$$\underline{u}_k = - D^{-1} A^* \underline{x}_k + D^{-1} \Lambda \underline{v}_k$$

- Ce nouveau système est mis sous la forme CD (28) en utilisant le changement de base

$$\hat{\underline{x}}_k = T \underline{x}_k$$

- Les $\hat{\underline{k}}_i^T$ sont déterminés en résolvant indépendamment les uns des autres les problèmes d'optimisation définis à partir de (30) et (31).

D'un point de vue pratique, cette procédure suppose que si on désire changer les performances dynamiques d'une sortie, il suffit de changer la ligne correspondante $\hat{\underline{k}}_i^T$ de $\hat{\underline{K}}$, ce qui réduit le problème d'optimisation global à un problème de dimension plus faible. L'un des principaux avantages de cette technique sera donc de minimiser considérablement le volume des calculs, ce qui permet d'envisager ultérieurement un traitement en ligne (Cf. Chapitre 5).

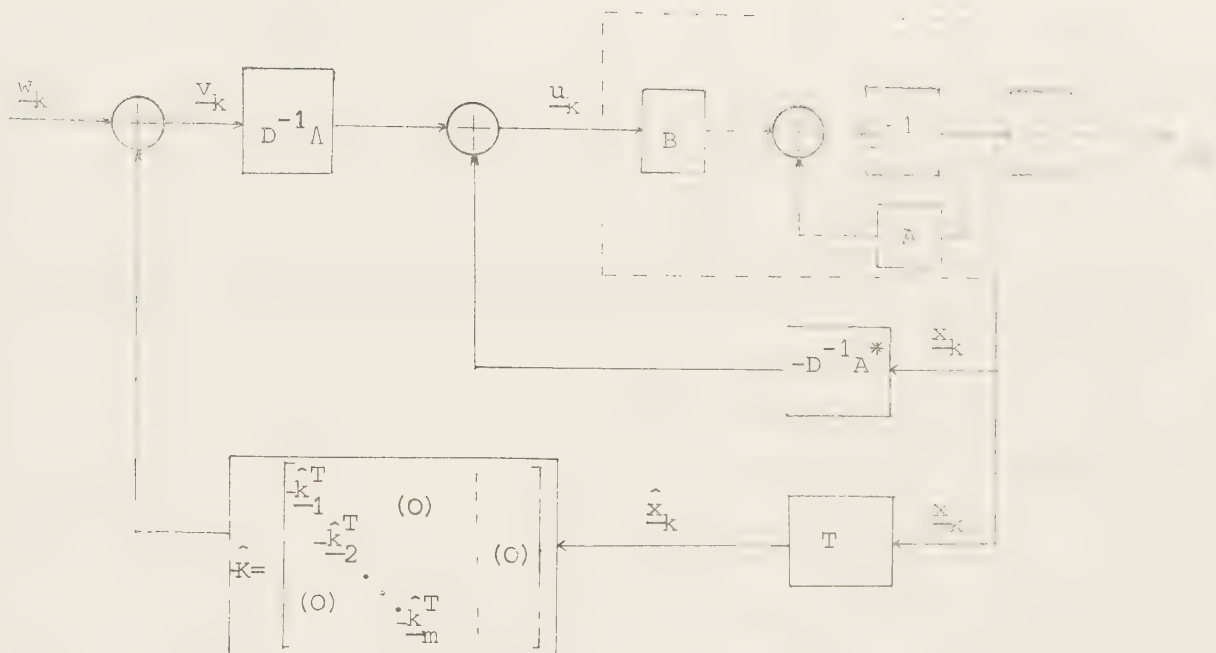


Fig. 3

Représentation schématique d'un système découplé

5 - DETERMINATION DU BOUCLAGE OPTIMAL $\hat{k}$ POUR UN SOUS SYSTEME $(\hat{A}_i, \hat{b}_i, \hat{c}_i^T)$

Les sous systèmes découplés mis en évidence dans la forme CD (28), ont été définis de façon précise au Chapitre 1. Nous nous contenterons donc simplement de rappeler ici quelques unes de leurs propriétés, utiles du point de vue de leur compensation.

5-1 - Rappels de résultats établis au Chapitre 1

De façon générale le sous système $(\hat{A}_i, \hat{b}_i, \hat{c}_i^T)$ est défini par :

$$\hat{A}_i = \left[\begin{array}{c|c} \begin{matrix} 0 & I_{d_i} & (O) \\ 0 & 0 & \end{matrix} & \begin{matrix} d_{i+1} \\ p_i \end{matrix} \\ \hline \begin{matrix} \psi_i & \phi_i \end{matrix} & \begin{matrix} r_i \end{matrix} \end{array} \right] \quad \hat{b}_i = \left[\begin{array}{c} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \lambda_i \\ -1 \\ \beta_i \end{array} \right] \quad \begin{matrix} d_{i+1} \\ r_i \end{matrix} \quad \hat{c}_i^T = \underbrace{[1 \ 0 \ \dots \ 0]}_{p_i} \quad (34)$$

Sa transmittance en boucle ouverte a la forme :

$$\frac{y_i(z)}{v_i(z)} = \frac{\lambda_i \alpha_i(z)}{z^{d_i+1} \alpha_i(z)}$$

avec $\alpha_i(z) = \det(z I_{r_i} - \phi_i) = z^{r_i} + \alpha_{i1} z^{r_i-1} + \dots + \alpha_{ir_i}$

Posons

$$v_{i,k} = - \frac{\hat{k}_i^T}{\underline{1}} \underline{x}_{i,k} + w_{i,k}$$

alors la transmittance en boucle fermée s'écrit :

$$\frac{y_i(z)}{w_i(z)} = \frac{\lambda_i \alpha_i(z)}{\phi_i(z, \underline{\sigma}_i^T)}$$

où les σ_{ij} sont les coefficients du polynôme caractéristique du système en boucle fermée. Si on pose :

$$\underline{\sigma}_i^T = [\sigma_{ip_i} \quad \dots \quad \sigma_{i1}]$$

alors

$$\underline{\sigma}_i^T = [\hat{k}_i^T V_i^{-1} + \underline{\pi}_i^T]$$

$$\underline{\pi}_i^T = \begin{bmatrix} 0 & \dots & 0 & \alpha_{ir_i} & \dots & \alpha_{i1} \end{bmatrix}$$

d_i+1

et où V_i est une matrice régulière qui ne dépend que de $(\hat{A}_i, \hat{b}_i)$.

5.2 - Compensation des sous systèmes $(\hat{A}_i, \hat{b}_i, \hat{c}_i^T)$

Avant d'aborder ce problème proprement dit, nous ferons quelques remarques d'ordre général sur le principe de la correction numérique linéaire et sur certaines restrictions imposées par le fait que le correcteur doit être physiquement réalisable et le système en boucle fermée stable.

* Limitations imposées par le correcteur :

Considérons le système représenté à la Fig. 4

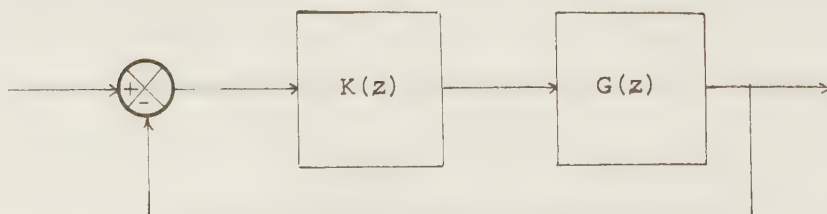


Figure 4

Le principe fondamental de la correction numérique est d'ajuster les différents coefficients de la fonction $K(z)$ de manière à obtenir une fonction de transfert en boucle fermée $H(z)$ désirée. Pour l'exemple précédent

$$H(z) = \frac{K(z) \cdot G(z)}{1 + K(z) \cdot G(z)}$$

Supposons $H(z)$ connue alors :

$$K(z) = \frac{1}{G(z)} \frac{H(z)}{1-H(z)}$$

et, étant donné que $K(z)$ est en général constitué d'éléments actifs, on peut théoriquement obtenir n'importe quelle fonction $H(z)$ physiquement réalisable. Cependant, ces fonctions ne conduisent pas toutes à des réseaux correcteurs $K(z)$ eux-mêmes physiquement réalisables. Il est donc nécessaire de s'imposer certaines limitations sur $H(z)$, qui découlent évidemment de restrictions faites sur les fonctions $G(z)$ et $K(z)$ [5], [6]. Parmi ces limitations, nous citerons :

- La fonction $H(z)$ doit contenir z^{-1} au numérateur à une puissance égale ou supérieure à la plus petite puissance contenue dans le numérateur de la fonction $G(z)$.

- Le dénominateur de $H(z)$ est de la forme

$$\sum_k \alpha_k z^{-k} \quad \text{avec} \quad \alpha_0 \neq 0$$

En observant ces deux règles élémentaires, on est assuré que le prototype spécifié $H(z)$ n'exigera pas d'éléments physiquement irréalisables pour $K(z)$.

* Limitations imposées par la stabilité du système en boucle fermée

Supposons que la fonction de transfert en boucle ouverte $G(z)$ contienne au moins un pôle et un zéro à l'extérieur du cercle unité et que toutes les autres irrégularités se trouvent à l'intérieur de ce cercle. Alors :

$$G(z) = \frac{z-a}{z-b} G_0(z)$$

où a et b sont respectivement le zéro et le pôle situés à l'extérieur du cercle unité. Soit $H_d(z)$ la fonction de transfert souhaitée en boucle fermée. Alors :

$$K(z) = \frac{1}{G(z)} \frac{H_d(z)}{1-H_d(z)}$$

En remplaçant $G(z)$ par sa valeur dans cette expression, on obtient :

$$K(z) = \frac{z-b'}{(z-a')G'_0(z)} \frac{H_d(z)}{1-H_d(z)}$$

où a' et b' sont des valeurs approchées de a et b et $G'_0(z)$ une fonction de transfert différente de $G_0(z)$ (Le modèle n'est pas identique au processus). La fonction de transfert en boucle fermée ainsi obtenue s'écrit dans ces conditions :

$$H(z) = \frac{(z-b')(z-a)G_0(z)H_d(z)}{(z-b)(z-a')G'_0(z)(1-H_d(z)) + (z-b')(z-a)H_d(z)G_0(z)}$$

Dans le cas idéal, modèle et processus sont identiques et :

$$H(z) = H_d(z)$$

Dans la pratique cependant cette dernière relation n'est jamais vérifiée et par conséquent le système en boucle fermée est instable, a' et b' étant par hypothèse voisins de a et b .

En conclusion, si $G(z)$ contient des zéros et des pôles à l'extérieur du cercle unité, ou sur la limite, il ne faut pas essayer de les supprimer à l'aide d'un correcteur numérique puisque pratiquement l'instabilité subsiste. Cela ne veut pas dire qu'un tel système ne puisse pas être stabilisé ou corrigé, seulement on ne dispose pas d'une liberté complète dans le choix de $H_d(z)$.

En appliquant des restrictions convenables sur la forme de $H_d(z)$, on peut obtenir une correction acceptable. Ces restrictions proviennent de la substitution de la valeur de $G(z)$ dans $K(z)$, soit :

$$K(z) = \frac{z-b}{(z-a)G_o(z)} \frac{H_d(z)}{1-H_d(z)}$$

Comme cette expression ne doit pas contenir le pôle a et le zéro b , ces termes doivent être contenus respectivement dans $H_d(z)$ et $1-H_d(z)$ et plus généralement on peut énoncer, [5], [6] :

"Il est nécessaire que la fonction de transfert en boucle fermée $H_d(z)$ admette comme zéros tous les zéros de la fonction de transfert en boucle ouverte $G(z)$ situés à l'extérieur du cercle unité et que $1-H_d(z)$ admette comme zéros tous les pôles de $G(z)$ situés à l'extérieur du cercle unité".

Ces remarques générales étant faites, nous allons aborder maintenant le problème de la compensation des sous systèmes découplés $(\hat{A}_i, \hat{b}_i, \hat{c}_i^T)$, avec l'objectif suivant :

La sortie y_i du système compensé doit avoir des performances indicielles requises, telles un temps de réponse, un temps de montée, un dépassement, etc...

Deux cas peuvent être envisagés.

a) Les états du système (34) sont tous observables

Alors $p_i = d_i + 1$ et (34) se réduit à

$$\hat{A}_i = \begin{bmatrix} 0 & I_{d_i} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \hat{b}_i = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \hat{c}_i^T = [1 \ 0 \ \dots \ 0] \quad (35)$$

Dans ce cas, la fonction de transfert correspondante s'écrit :

$$G(z) = \frac{1}{z^{d_i+1}}$$

b) Certains états du système (34) sont inobservables

La fonction de transfert s'écrit alors :

$$G(z) = \frac{\lambda_i \alpha_i(z)}{z^{d_i+1} \alpha_i(z)}$$

Compte tenu des remarques précédentes et d'une manière analogue à celle utilisée au chapitre 2 pour les systèmes continus, on peut montrer que des problèmes se posent au niveau de la stabilité et plus précisément que :

- Si les modes inobservables de (34) sont stables, on peut simplifier sans trop de dommage le numérateur et le dénominateur de la fonction de transfert par $\alpha_i(z)$, ce qui nous ramène finalement au cas a).

- Si les modes inobservables de (34) sont instables, il est dangereux d'effectuer cette simplification et il faut par conséquent raisonner sur la transmittance globale.

Nous allons envisager successivement ces deux cas et tout d'abord :

5.2.1 - Compensation d'un système composé exclusivement de retards purs en cascade

En suivant une idée analogue à celle utilisée pour les systèmes continus, nous chercherons tout d'abord à utiliser le concept d'optimalité pour effectuer la synthèse de la fonction de transfert en boucle fermée.

5.2.1.1 - Solution optimale

Le problème se pose de la façon suivante : peut-on trouver des critères quadratiques aussi simples que possible permettant de réaliser les objectifs que l'on s'est fixé préalablement sur la sortie y_1 (temps de réponse, dépassement indiciel) ?

Nous raisonnerons de façon générale sur un système d'ordre n , du type (35) :

$$\underline{\hat{x}}_{1,k+1} = \hat{A}_1 \underline{\hat{x}}_{1,k} + \hat{b}_1 v_{1,k} \tag{35}$$

$$y_{1,k} = \hat{c}_1^T \underline{\hat{x}}_{1,k}$$

où $\hat{A}_1$, $\hat{b}_1$ et $\hat{c}_1$ ont les définitions précédentes.

Choisissons comme dans le cas continu un critère :

$$\hat{J} = \frac{1}{2} \sum_0^{\infty} (q_i^2 y_{i,k}^2 + v_{i,k}^2) \quad (36)$$

D'après le paragraphe 2, la solution de ce problème d'optimisation est :

$$v_{i,k} = - \frac{\hat{b}_i^T P_i \hat{A}_i}{1 + \hat{b}_i^T P_i \hat{b}_i} \hat{x}_{i,k}$$

où P_i est solution de

$$P_i = \hat{A}_i^T P_i \hat{A}_i - \frac{\hat{A}_i^T P_i \hat{b}_i \hat{b}_i^T P_i \hat{A}_i}{1 + \hat{b}_i^T P_i \hat{b}_i} + q_i^2 \hat{c}_i \hat{c}_i^T \quad (37)$$

Etant donné la forme particulière de $\hat{A}_i$, $\hat{b}_i$, $\hat{c}_i^T$ (37) s'écrit :

$$\begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} \dots p_{1n} \\ & p_{22} \dots p_{2n} \\ & & \ddots \\ x & & & p_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \dots 0 \\ 0 & p_{11} \dots p_{1,n-1} \\ \vdots & & \ddots \\ \vdots & x & & \vdots \\ 0 & & & p_{n-1,n-1} \end{bmatrix} - \frac{1}{1+p_{nn}} \begin{bmatrix} 0 & 0 \dots 0 \\ 0 & p_{1n} \dots p_{1n} \cdot p_{n-1,n} \\ \vdots & & \ddots \\ \vdots & x & & \vdots \\ 0 & & & p_{n-1,n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} q_i^2 & 0 \dots 0 \\ 0 & 0 & \vdots \\ \vdots & & \ddots \\ \vdots & & & 2 \\ 0 & \dots 0 \end{bmatrix}$$

D'après la forme de cette équation, il est évident que :

$$p_{ij} = 0 \quad \forall i \text{ et } j \quad i \neq j$$

Il s'en suit que la solution P_i de l'équation (37) s'écrit :

$$P_i = \text{diag} [q_i^2]$$

et par conséquent :

$$\hat{b}_i^T P_i \hat{A}_i = [0 \dots 0]$$

La solution du problème d'optimisation défini par (35) et (36) est donc triviale. Ce résultat n'est d'ailleurs pas surprenant puisqu'il n'existe entre la commande et la sortie qu'un certain temps mort et par conséquent le critère sera minimum si l'on maintient cette commande nulle.

Pour éviter cette trivialité, il est donc nécessaire d'utiliser des critères plus élaborés du type "coût croisé". Malheureusement, il n'existe pas à l'heure actuelle de lien direct entre les performances dynamiques que l'on peut souhaiter sur la sortie y_i et les matrices de pondération du critère. L'utilisation d'une commande optimale quadratique n'est donc pas un moyen simple pour obtenir, dans le cas discret, un système en boucle fermée avec des performances données.

Néanmoins, pour y parvenir, on peut opérer de la façon suivante :

- On se donne des performances sur la sortie sous forme d'une transmittance $H_d(z)$.

- $H_d(z)$ étant supposée connue, on détermine le correcteur $K(z)$ qu'il faut utiliser pour obtenir $H_d(z)$ à partir de la transmittance en boucle ouverte $G(z)$.

Le problème est donc maintenant de déterminer une fonction $H_d(z)$ ayant des performances indicielles données tout en restant conforme aux restrictions mentionnées précédemment.

5.2.1.2 - Utilisation d'un modèle continu équivalent

Nous admettrons, comme préalable, que le système discret en boucle fermée peut être considéré comme l'échantillonnage d'un certain système continu, de même dimension. Le problème d'équivalence se pose alors en termes d'identité des sorties, aux instants d'échantillonnage, des deux systèmes excités par la même entrée, qui est dans le cas présent un échelon. Pour simplifier l'écriture, nous laisserons tomber l'indice i .

a) Le pas d'échantillonnage est faible

Etant donné le système continu

$$\dot{\underline{\hat{x}}} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 1 \\ -\hat{a}_n & \dots & \dots & \dots & -\hat{a}_1 \end{bmatrix} \underline{\hat{x}} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} w \quad (38)$$

$$y = [\hat{a}_n \ 0 \ \dots \ 0] \underline{\hat{x}}$$

Le pas d'échantillonnage Δ étant choisi faible, le système discret équivalent de (38) est défini par :

$$\underline{\hat{x}}_{k+1} = \hat{A}_d \underline{\hat{x}}_k + \hat{b}_d w_k$$

$$y_k = [\hat{a}_n \ 0 \ \dots \ 0] \underline{\hat{x}}_k$$

avec

$$\hat{A}_d = I_n + A\Delta$$

$$\hat{b}_d = \Delta \underline{b}$$

$$A_d = \begin{bmatrix} 1 & \Delta & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \Delta & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \Delta \\ -\hat{a}_n \Delta & \dots & \dots & \dots & 1 - \hat{a}_1 \Delta \end{bmatrix} \quad b_d = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \Delta \end{bmatrix}$$

Cherchons la fonction de transfert de ce système :

$$\frac{Y(z)}{W(z)} = [\hat{a}_n \ 0 \ \dots \ 0] \begin{bmatrix} z-1 & -\Delta & 0 & \dots & 0 \\ 0 & z-1 & -\Delta & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & -\Delta \\ \hat{a}_n \Delta & \dots & \dots & \dots & z - (1 - \hat{a}_1 \Delta) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \Delta \end{bmatrix}$$

$$\frac{Y(z)}{W(z)} = [\hat{a}_n \ 0 \ \dots \ 0] \begin{bmatrix} x & x & \dots & \Delta^{n-1} \\ y & y & \dots & x \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ x & x & \dots & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \Delta \end{bmatrix} \times \frac{1}{\phi(z)}$$

Soit :

$$\frac{Y(z)}{W(z)} \Delta = H_d(z) = \frac{\hat{a}_n \Delta^n}{z^n + z^{n-1} k_1 + \dots + k_n}$$

ou bien

$$H_d(z) = \frac{\hat{a}_n \Delta^n z^{-n}}{1 + k_1 z^{-1} + \dots + k_n z^{-n}}$$

Cette dernière forme montre que l'on peut toujours trouver un correcteur physiquement réalisable permettant d'obtenir à partir du système en boucle ouverte (35), de transmittance $G(z) = z^{-n}$, un système en boucle fermée de transmittance $H_d(z)$ (Un exemple de réponse indiciel est donnée à la figure 5).

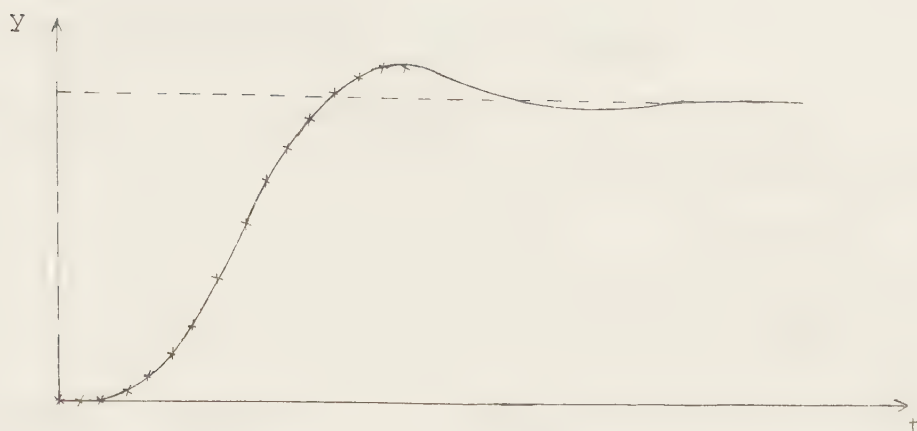


Figure 5 - Exemple d'un système du 3ème ordre échantillonné avec un pas faible.

Nous choisirons un correcteur sous la forme d'un bouclage sur l'état, soit :

$$v_k = - [\hat{k}_n \dots \hat{k}_1] \hat{x}_k + \hat{a}_n \Delta^n w_k \quad (40)$$

Une telle loi de bouclage conduit effectivement à partir du système en boucle ouverte (35) à un système en boucle fermée de transmittance $H_d(z)$.

Dans la pratique, on opérera de la façon suivante :

- L'ordre du système discret étant connu, on détermine un système continu de même ordre, à partir d'un système d'intégrateurs piloté suivant les techniques du chapitre 2, et ayant des performances dynamiques requises.

- On détermine alors les coefficients k_i du polynôme caractéristique du système discret équivalent. Cette opération ne pose pas de difficulté particulière si on se rappelle que les valeurs propres μ_i du système discret et les valeurs propres du système continu sont données par la relation $\mu_{di} = 1 + \mu_i \Delta$ (Δ faible).

- Les coefficients k_i étant ainsi déterminés, on en déduit la loi de bouclage (40) qu'il faut appliquer au système de retards purs (36) pour avoir un système discret avec les performances requises.

b) Le pas d'échantillonnage est quelconque

Dans ce cas, les matrices A_d et b_d sont données par les relations suivantes :

$$A_d = e^{A\Delta}$$

$$b_d = \int_0^{\Delta} e^{A(\Delta-\tau)} \underline{b} d\tau$$

Ces matrices ont malheureusement une forme tout à fait quelconque. Cependant, si la paire $(\hat{A}_d, \hat{b}_d)$ est complètement commandable, hypothèse que nous supposons toujours satisfaite, le système peut toujours être mis sous la forme canonique suivante :

$$[\delta'_n \dots \delta'_1] \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 1 \\ -\delta_n & -\delta_{n-1} & \dots & \dots & -\delta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

à laquelle correspond la transmittance :

$$H_d(z) = \frac{z^{n-1}\delta'_1 + \dots + \delta'_n}{z^n + \delta_1 z^{n-1} + \dots + \delta_n}$$

ou bien

$$H_d(z) = \frac{\delta'_1 z^{-1} + \dots + \delta'_n z^{-n}}{1 + \delta_1 z^{-1} + \dots + \delta_n z^{-n}}$$

Cette dernière forme montre qu'il n'existe pas de correcteur physiquement réalisable qui permette d'obtenir à partir de la transmittance en boucle ouverte $G(z) = z^{-n}$ une transmittance en boucle fermée $H_d(z)$. En effet pour arriver à un tel résultat, le correcteur devrait comporter des "termes d'avance" en z qu'on ne peut manifestement pas construire.

On pourra donc, tout au plus, obtenir une fonction de transfert $H'_d(z)$ telle que :

$$H'_d(z) = z^{-1-n} H_d(z)$$

C'est-à-dire qu'entre la sortie désirée et celle que l'on peut effectivement atteindre, on doit tolérer un temps morts de $n-1$ pas d'échantillonnage. Fig. 6.

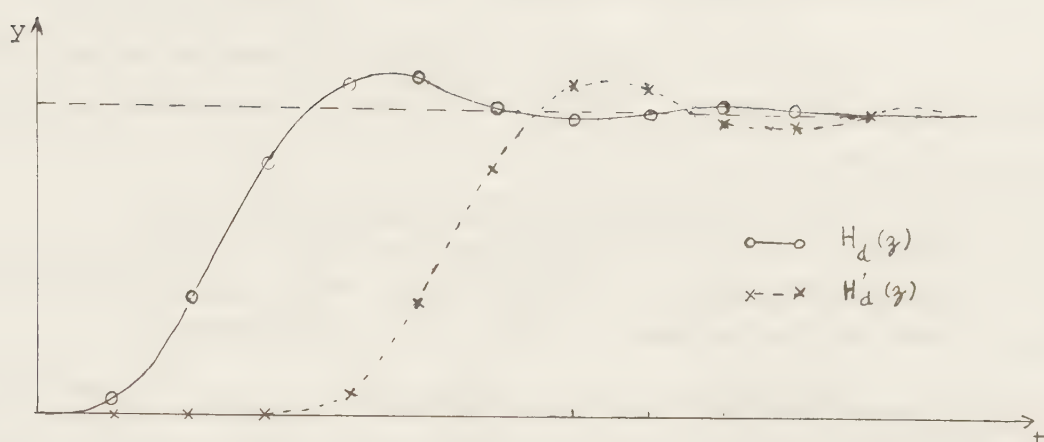


Figure 6 - Exemple d'un système du 4ème ordre échantillonné avec un pas quelconque.

Il est évident qu'une telle contrainte n'est cependant pas souhaitable ni pour un système purement discret, ni pour un système échantillonné. Toutefois, dans ce dernier cas, il est toujours raisonnable de faire l'hypothèse "pas d'échantillonnage faible" pour des raisons de sécurité de l'installation. En effet, supposons le système soumis à une perturbation, alors les sorties du processus vont évoluer dans le temps et le but de la correction numérique sera évidemment de les ramener dans les meilleures conditions à leurs valeurs de consigne. La qualité de la régulation dépendra en particulier de la vitesse de variation des sorties et de la fréquence d'échantillonnage. Il est manifeste que plus la vitesse de variation est grande, plus la fréquence d'échantillonnage doit être élevée et par conséquent le pas d'échantillonnage faible.

Remarque : Nous avons raisonné sur des fonctions de transfert, ce qui nous a amené à déterminer le correcteur sous forme d'une fraction rationnelle $K(z)$. Ceci peut être évidemment transposé dans l'espace d'état, le correcteur étant cette fois-ci élaboré sous forme d'un compensateur dynamique dont la forme générale sera la suivante :

$$\begin{array}{l} \text{Système en B.O.} \\ \left\{ \begin{array}{l} \hat{x}_{k+1} = \hat{A} \hat{x}_k + \hat{b} v_k \\ y_k = \hat{C} \hat{x}_k \end{array} \right. \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{Compensateur dynamique} \\ \left\{ \begin{array}{l} \lambda_{k+1} = F_1 \hat{x}_k + F_2 \lambda_k + F_3 w_k \\ v_k = \hat{k}_1^T \hat{x}_k + \hat{k}_2^T \lambda_k + \hat{k}_3 w_k \end{array} \right. \end{array}$$

5.2.2 - Compensation d'un système avec numérateur dynamique

Pour cette catégorie de systèmes, on rencontre les mêmes difficultés qu'au § précédent, si on utilise le concept d'optimalité pour déterminer le correcteur, à savoir :

- Impossibilité d'utiliser des critères simples
- Difficulté de rattacher aux matrices de pondération du critère les notions simples de temps de réponse, de dépassement, etc...

Nous opérerons donc d'une manière classique, c'est-à-dire que nous déterminerons le réseau correcteur comme précédemment à partir d'une fonction de transfert en boucle fermée désirée $H_d(z)$.

Au préalable, pour éviter toute simplification au niveau de la fonction de transfert en boucle ouverte $G(z)$, nous l'écrirons sous la forme :

$$G'(z) = \frac{\alpha_i(z)}{z^{d_i} \alpha_i'(z)}$$

où $\alpha_i'(z)$ est n'importe quel polynôme stable de degré r_i , obtenu à partir de $G(z)$ par un simple bouclage sur l'état.

Pour obtenir un correcteur réalisable et un système en boucle fermée stable, nous avons vu que $H_d(z)$ devait répondre à certaines spécifications qui sont dans le cas présent : le numérateur de $H_d(z)$ doit contenir en facteur :

- z^{-1} au moins à la puissance $d_i + 1$
- Tous les zéros de $\alpha_i(z)$, puisqu'ils sont par hypothèse situés à l'extérieur du cercle unité.

$$\text{Posons } H_d(z) = z^{-d_i} H(z)$$

$$\text{avec } H(z) = z^{-1} \alpha_i^*(z) \frac{P(z)}{Q(z)}$$

où $\alpha_i^*(z)$ désigne le polynôme réciproque de $\alpha_i(z)$ ⁽¹⁾, et où $P(z)$ et $Q(z)$ sont des polynômes en z^{-1} , choisis de telle sorte que $\text{degré} \{z^{-1} \alpha_i^*(z) P(z)\} < \text{degré de } Q(z)$.

(1) On appelle polynôme réciproque de $\alpha_i(z)$ tout polynôme dont les racines sont les inverses des racines de $\alpha_i(z)$. Exemple :

$$\alpha_i(z) = z^n + \alpha_1 z^{n-1} + \dots + \alpha_n \quad \alpha_i^*(z) = 1 + \alpha_1 z^{-1} + \dots + \alpha_n z^{-n}$$

Les coefficients de ces deux polynômes seront déterminés de manière que la réponse impulsionnelle de $H(z)$ approche au mieux une réponse impulsionnelle donnée. Dans la pratique, on opérera de la façon suivante :

- On se donne une réponse impulsionnelle, par exemple en échantillonnant un système continu convenablement choisi.

- On choisit des polynômes $P(z)$ et $Q(z)$ de degrés aussi faibles que possible, de façon à limiter la complexité du réseau correcteur ultérieur, et on détermine leurs coefficients par PNL pour respecter au mieux le critère précédent [7].

La fonction de transfert $H(z)$ étant ainsi déterminée $H_d(z)$ on déduit immédiatement et le réseau correcteur est alors donné par :

$$K(z) = \frac{1}{G'(z)} \frac{H_d(z)}{1-H_d(z)}$$

Nous avons montré dans ce chapitre que dans le cas discret, découplage et optimisation étaient deux objectifs compatibles. Une classe particulière des critères quadratiques permettant d'obtenir un système optimal non interactif est donnée par le Lemme 3. Sur le plan pratique, il est néanmoins préférable d'utiliser les résultats du Théorème 4 et d'opérer en deux étapes :

- a) découpler le système initial suivant les techniques développées au chapitre 1.
- b) optimiser chaque sous système découplé.

Cependant, la nature même des sous systèmes que l'on considère (retards purs en cascade) ne permet pas de trouver des solutions optimales simples, comme le cas continu, autres que des solutions triviales. Pour répondre à notre objectif initial, c'est-à-dire régler des performances dynamiques tels qu'un temps de réponse et un dépassement, il est donc nécessaire d'utiliser des critères plus élaborés du type "coût croisé". Malheureusement, il n'existe pas, à l'heure actuelle, de lien direct entre ces performances et les facteurs de pondération du critère, aussi avons nous été amenés à utiliser la notion de "système continu équivalent". Ceci nous a permis de mettre en évidence des solutions simples pour les systèmes uniquement de retards purs en cascade et lorsque le pas d'échantillonnage est petit. Lorsque le pas d'échantillonnage est quelconque, nous suggérons l'emploi d'un compensateur dynamique permettant d'approcher au mieux la réponse souhaitée. Dans un cas plus général, c'est-à-dire lorsque la fonction de transfert possède un numérateur dynamique, et si on ne tolère pas de simplification entre pôles et zéros, le problème est plus complexe, et le recours à des méthodes utilisant la Rb.L. peut être nécessaire.

Ce chapitre, comme le précédent d'ailleurs, reste essentiellement théorique. Aussi, plutôt que d'envisager dès à présent la mise en oeuvre pratique du système de commande sur processus réel, il nous a semblé utile d'illustrer, par quelques exemples, un certain nombre de résultats théoriques, ce qui permettra par la même occasion, de tester le bon fonctionnement des algorithmes. Ceci fait l'objet du chapitre suivant.

- BIBLIOGRAPHIE -

- [1] P. DORATO, "Optimal Linear Regulators : The Discrete - Time Case".
IEEE. Trans. Aut. Cont. AC 16, 6, pp. 613-620,
Décembre 1971.
- [2] C.C. ARCASOY "Return-difference-matrix properties for optimal stationary discrete Kalman filter"
Proc. IEEE, Vol. 118, 12, pp. 1831-1834,
Décembre 1971.
- [3] R.E. KALMAN "When is a linear control system optimal" ?
Journal of Basic Engineering, Trans. of the ASME,
pp. 51-60, March 1964.
- [4] R.E. KALMAN "Mathematical Description of Linear Dynamical Systems" SIAM
J. Cont. Ser A, Vol. 1, n° 2, pp. 152-192, 1963.
- [5] J.R. RAGAZZINI "Les systèmes asservis échantillonnés"
G.F. FRANKLIN Dunod Editeur, Paris 1962.
- [6] Y. SEVELY "Systèmes et Asservissements linéaires échantillonnés".
Dunod, Université, Paris 1969.
- [7] J.F. LAFFAY "Séparations des variables dans la minimisation de l'erreur de sortie. Application à l'identification à partir des séquences de pondération"
D.E.A., E.N.S.M., Nantes 1975.

APPENDICE I

Expression de la matrice "différence de retour" en fonction des matrices de transfert des systèmes en boucle fermée et en boucle ouverte.

Etant donné le système en boucle ouverte

$$\begin{aligned}\underline{x}_{k+1} &= A \underline{x}_k + B \underline{u}_k \\ \underline{y}_k &= C \underline{x}_k\end{aligned}\tag{1}$$

avec $\dim \underline{y}_k = \dim \underline{u}_k$, et la loi de commande

$$\underline{u}_k = -K \underline{x}_k + \underline{w}_k\tag{2}$$

En boucle fermée, on obtient :

$$\begin{aligned}\underline{x}_{k+1} &= (A-BK) \underline{x}_k + B \underline{w}_k = A_k \underline{x}_k + B \underline{w}_k \\ \underline{y}_k &= C \underline{x}_k\end{aligned}\tag{3}$$

La matrice de transfert correspondante s'écrit :

$$H_k(z) = C(z I_n - A_k)^{-1} B\tag{4}$$

En considérant (1) et (2), nous pouvons écrire :

$$\underline{u}(z) = -K(z I_n - A)^{-1} B \underline{u}(z) + \underline{w}(z)$$

ou

$$\underline{u}(z) = [I_m + K(z I_n - A)^{-1} B]^{-1} \underline{w}(z)\tag{5}$$

et la matrice de transfert relative à (1), compte tenu de (2) et de (5), peut encore s'écrire :

$$H_k(z) = C(z I_n - A)^{-1} B [I_m + K(z I_n - A)^{-1} B]^{-1}$$

D'où l'on tire :

$$H_k^{-1}(z) \cdot H(z) = I_m + K(z I_n - A)^{-1} B\tag{6}$$

en posant

$$H(z) = C(z I_n - A)^{-1} B$$

$H(z)$ étant la matrice de transfert du système en boucle ouverte.

Remarque : Pour les systèmes monovariables, la relation (6) se réduit évidemment au rapport des polynômes caractéristiques, soit :

$$\frac{\psi_k(z)}{\psi(z)} = 1 + \underline{k}^T (z I_n - A)^{-1} \underline{b}$$

APPENDICE II

Exemple de détermination d'un critère quadratique conduisant à une loi de commande stable et observable donnée pour un système en boucle ouverte donné.

Considérons le système en boucle ouverte

$$\underline{x}_{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \underline{x}_k + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} u_k = A \underline{x}_k + \underline{b} u_k$$

et la loi de commande

$$u_k = - [0,25 \quad -1] \underline{x}_k = - \underline{k}^T \underline{x}_k$$

Le polynôme caractéristique du système en boucle fermée s'écrit :

$$\psi_k(z) = z^2 - z + 0,25 = (z - 0,5)^2$$

Calculons :

$$\psi_k(z) \cdot \psi_k(z^{-1}) = (z^2 - z + 0,25) (z^{-2} - z^{-1} + 0,25)$$

$$\psi_k(z) \cdot \psi_k(z^{-1}) = 2,0625 - 1,25 (z + z^{-1}) + 0,25 (z^2 + z^{-2})$$

Posons :

$$\psi_s(z) = z^2 + s_1 z + s_2$$

et calculons
$$\psi_s(z) \cdot \psi_s(z^{-1}) = (z^2 + s_1 z + s_2) (z^{-2} + s_1 z^{-1} + s_2)$$

Peut-on choisir les paramètres s_1, s_2 et un nombre $\rho^2 < 1$ tel que le polynôme

$$\psi_k(z) \cdot \psi_k(z^{-1}) - \rho^2 \psi_s(z) \cdot \psi_s(z^{-1})$$

soit non négatif pour $|z| = 1$?

$$\begin{aligned} \psi_k(z) \cdot \psi_k(z^{-1}) - \rho^2 \psi_s(z) \cdot \psi_s(z^{-1}) &= 2,0625 - \rho^2(1 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2) - (1,25 + \rho^2 \alpha_1(\alpha_2 + 1))(z + z^{-1}) \\ &\quad + (0,25 - \rho^2 \alpha_2)(z^2 + z^{-2}) \end{aligned}$$

Choisissons ρ^2 de telle sorte que

$$\rho^2 \alpha_2 = 0,25$$

Alors :

$$\psi_k(z) \cdot \psi_k(z^{-1}) - \rho^2 \psi_s(z) \cdot \psi_s(z^{-1}) = 2,0625 - \rho^2(1 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2) - (1,25 + \rho^2 \alpha_1(\alpha_2 + 1))(z + z^{-1})$$

Pour que ce polynôme soit non négatif pour $|z| = 1$, il faut que :

$$2,0625 - \rho^2(1 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2) \geq 2,5 + 2\rho^2 \alpha_1(\alpha_2 + 1)$$

ou

$$- 0,4375 - \rho^2 (1 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2) \geq 2\rho^2 \alpha_1 (1 + \alpha_2)$$

En tenant compte du fait que $\rho^2 \alpha_2 = 0,25$, on obtient :

$$- 0,4375 - 0,25 \alpha_2 - \rho^2 (1 + \alpha_1^2) \geq (2\rho^2 + 0,5) \alpha_1$$

Prenons :

$$\alpha_2 = 0,5$$

Alors :

$$\rho^2 = 0,5$$

et, par conséquent, on doit vérifier en définitive la condition :

$$0,5 \alpha_1^2 + 1,5 \alpha_1 + 1,0625 \leq 0$$

Cette expression s'annule pour $\alpha_1 = -1,5 \pm \sqrt{0,125}$ et elle est négative pour tout α_1 compris entre ces deux valeurs. Prenons :

$$\alpha_1 = -1,5$$

Dans ces conditions, le polynôme $\psi_s(z)$ s'écrit :

$$\psi_s(z) = z^2 - 1,5 z + 0,5$$

A ce polynôme caractéristique correspond un nouveau système A_s défini par :

$$A_s = A - \underline{b} \underline{s}^T \quad \text{avec} \quad \underline{s}^T = [s_2 \quad s_1] = [0,5 \quad -1,5]$$

Le problème est maintenant le suivant : existe-t-il un critère quadratique en r et $\underline{h} \underline{h}^T$ qui, à partir du système A_s , conduise au système :

$$A_k = A - \underline{b} \underline{k}^T$$

Pour qu'il en soit ainsi, il est nécessaire et suffisant qu'il existe une matrice P définie positive, telle que :

$$\rho^2 = \frac{r}{r + \underline{b}^T P \underline{b}}$$

ce qui, dans le cas présent, donne en choisissant $r = 1$:

$$\rho^2 = \frac{1}{1 + p_{22}} = 0,5$$

d'où :

$$p_{22} = 1$$

Calculons maintenant :

$$\begin{aligned} (r + \underline{b}^T \underline{P} \underline{b}) \frac{\psi_k(z) \cdot \psi_k(z^{-1})}{\psi_s(z) \cdot \psi_s(z^{-1})} &= 2 \frac{2,0625 - 1,25(z+z^{-1}) + 0,25(z^2+z^{-2})}{3,5 - 2,25(z^{-1}+z) + 0,5(z^2+z^{-2})} - 1 \\ &= \frac{0,625 - 0,25(z+z^{-1})}{\psi_s(z) \cdot \psi_s(z^{-1})} \end{aligned}$$

Le numérateur de cette fraction rationnelle étant non négatif doit se factoriser en :

$$(h_1 + h_2 z) (h_1 + h_2 z^{-1})$$

D'où :

$$h_1^2 + h_2^2 = 0,625$$

$$h_1 h_2 = -0,25$$

Deux solutions sont possibles, soit :

$$h_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad h_2 = -0,3536$$

$$h_1 = 0,3536 \quad h_2 = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

Nous adopterons la seconde pour avoir un polynôme $(h_1 + h_2 z)$ dont la racine est située à l'intérieur du cercle de rayon 1, d'où :

$$\underline{h} = \begin{bmatrix} 0,3536 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{bmatrix}$$

ce qui donne finalement :

$$\underline{h} \underline{h}^T = \begin{bmatrix} 0,125 & -0,25 \\ -0,25 & 0,5 \end{bmatrix}$$

De plus, la loi de bouclage qui fait passer du système A_s au système A_k devant être stable, on doit vérifier la condition :

$$\underline{k}^T - \underline{s}^T = \frac{\underline{b}^T \underline{P} A_s}{r + \underline{b}^T \underline{P} \underline{b}}$$

ce qui implique que :

$$k_1 - s_1 = \frac{p_{12} - \alpha_1 p_{22}}{1 + p_{22}}$$

D'où :

$$p_{12} = -0,5$$

La matrice P est donc de la forme :

$$P = \begin{bmatrix} p_1 & -0,5 \\ -0,5 & 1 \end{bmatrix}$$

où p_1 est n'importe quel coefficient positif tel que P soit définie positive.

Inversement, le système A_s étant donné, examinons si le critère

$$\frac{1}{2} \sum_0^{\infty} (\underline{x}_k^T \underline{h} \underline{h}^T \underline{x}_k + u_{1k}^2)$$

conduit effectivement au système en boucle fermée A_k . La solution du problème d'optimisation ainsi défini est donnée par :

$$u_{1k} = - \underline{\lambda}^T \underline{x}_k$$

avec :

$$\underline{\lambda}^T = \frac{\underline{b}^T \bar{P} A_s}{1 + \underline{b}^T \bar{P} \underline{b}}$$

où $\bar{P}$ est solution de :

$$\bar{P} = A_s^T \bar{P} A_s - A_s^T \bar{P} \underline{b} (1 + \underline{b}^T \bar{P} \underline{b})^{-1} \underline{b}^T \bar{P} A_s + \underline{h} \underline{h}^T$$

En remplaçant par les valeurs numériques précédentes, on obtient :

$$\bar{P} = \begin{bmatrix} 0,25 & -0,5 \\ -0,5 & 1 \end{bmatrix}$$

ce qui conduit à la loi de commande :

$$\underline{\lambda}^T = \begin{bmatrix} -0,25 & 0,5 \end{bmatrix} = \underline{k}^T - \underline{s}^T$$

Pour passer du système en boucle ouverte A au système en boucle fermée A_k , il suffit donc d'utiliser le critère :

$$J = \frac{1}{2} \sum_0^{\infty} \{ \underline{x}_k^T (\underline{h} \underline{h}^T + \underline{s} \underline{s}^T) \underline{x}_k + 2 u_k \underline{s}^T \underline{x}_k + u_k^2 \}$$

Soit :

$$J = \frac{1}{2} \sum_0^{\infty} \underline{x}_k^T \begin{bmatrix} -0,375 & -1 \\ -1 & 2,75 \end{bmatrix} \underline{x}_k + 2 u_k \begin{bmatrix} 0,5 & -1,5 \end{bmatrix} \underline{x}_k + u_k^2$$

CHAPITRE 4

RÉSULTATS NUMÉRIQUES ET SIMULATIONS

- 1 - Introduction
- 2 - Découplage sans compensation dynamique : Résultats numériques et simulations
- 3 - Découplage avec compensation dynamique : Résultats numériques
- 4 - Exemples de réglage d'un sous système discret découplé
 - 4.1 - Sans numérateur dynamique
 - 4.2 - Avec numérateur dynamique
- 5 - Conclusion

Résumé :

L'algorithme de découplage optimal qui découle des chapitres précédents étant destiné à être mis en oeuvre sur processus réel, une étude préalable en simulation est donc nécessaire. Nous avons donc rapporté dans ce chapitre un certain nombre de résultats qui prouveront sa validité et qui illustreront en même temps pour le lecteur les principaux points théoriques qui viennent d'être établis.

1 - INTRODUCTION

Nous nous proposons dans ce chapitre d'illustrer, par quelques exemples, une partie des algorithmes développés aux chapitres précédents sur le plan théorique.

Le modèle mathématique que nous considérerons à cet effet est celui qui a été utilisé pour l'application réelle que nous rapportons en détail au chapitre 5. Nous nous contenterons donc ici d'indiquer simplement qu'il comporte huit états, trois entrées et trois sorties.

En prenant comme prétexte ce modèle, nous établirons donc un certain nombre de résultats numériques destinés à illustrer :

- au paragraphe 2, les principaux points théoriques du chapitre 1 qui concernent le découplage simple. Ces résultats seront suivis de quelques simulations ayant pour but de mettre en évidence la facilité de réglage des sous systèmes constitués d'intégrateurs purs en cascade lorsqu'on utilise la méthode proposée au chapitre 2.

- au paragraphe 3, le découplage avec compensation dynamique, les points importants que nous envisagerons étant essentiellement le calcul proprement dit du compensateur et la forme des sous systèmes découplés.

- au paragraphe 4, à l'aide d'exemples du second ordre, la commande de sous systèmes discrets constitués de retards purs en cascade avec ou sans numérateur dynamique, par les méthodes développées au chapitre 3.

2 - DECOUPLAGE SANS COMPENSATION DYNAMIQUE

Le modèle utilisé est défini par le système d'équations linéaires

$$\begin{aligned}\dot{\underline{x}} &= A \underline{x} + B \underline{u} \\ \underline{y} &= C \underline{x}\end{aligned}\tag{1}$$

où $\underline{x}$ est le vecteur d'état de dimension 8, $\underline{y}$ le vecteur de sortie de dimension 3 et $\underline{u}$ le vecteur de commande également de dimension 3. A, B et C sont des matrices constantes de dimensions appropriées dont les valeurs numériques sont données fig. 1.

Le système (1) satisfait la condition nécessaire et suffisante de découplage qui s'exprime dans le cas présent par le fait que la matrice

$$D = \begin{bmatrix} \underline{c}_1^T A B \\ \underline{c}_2^T A B \\ \underline{c}_3^T A B \end{bmatrix}\tag{2}$$

est régulière.

$$\begin{aligned}
 A = & \begin{bmatrix} -3333.10^{-5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1000.10^{-5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1111.10^{-5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 727.10^{-5} & 136.10^{-5} & 91.10^{-5} & 0 & -455.10^{-5} & 0 & 0 & -273.10^{-5} & 0 \\ 600.10^{-5} & 0 & 0 & 0 & 1000.10^{-5} & -1000.10^{-5} & 0 & 0 & 0 \\ 360.10^{-5} & 0 & -180.10^{-5} & 0 & 0 & 120.10^{-5} & -400.10^{-5} & 0 & 0 \\ 285.10^{-5} & 0 & 0 & 19.10^{-5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 B = & \begin{bmatrix} 3333.10^{-5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1000.10^{-5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1111.10^{-5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 10^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -250.10^{-5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
 C = & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

Fig. 1 - Valeurs numériques des matrices A, B et C.

D'après la forme de cette matrice, il est clair que les entiers d_1, d_2 (cf. chapitre 1) sont tous égaux à 1.

L'algorithme de découplage met alors en évidence trois sous systèmes ayant respectivement pour dimensions :

$$p_1 = d_1 + 1 = 2$$

$$p_2 = d_2 + 1 = 2$$

$$p_3 = d_3 + 1 = 2$$

et un sous système inobservable ayant pour dimension :

$$p_4 = 8 - (p_1 + p_2 + p_3) = 2$$

Celui-ci est stable puisque ses valeurs propres sont :

$$\lambda_1 = -0,0529 \text{ et } \lambda_2 = -0,00561$$

La mise en oeuvre pratique du découplage est donc possible. Plus précisément, on doit maintenant régler trois sous systèmes constitués chacun de deux intégrateurs purs en cascade et définis par le triplet :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

La classe des lois de commande qui rendent le système (1) non-interactif est définie par :

$$\underline{u} = (F - G\hat{K}T) \underline{x} + G\hat{L}\underline{y}_c \quad (4)$$

avec $F = -D^{-1}A^*$ $G = D^{-1}$

$$\text{et } A^* = \begin{bmatrix} \underline{c}_1^T A^2 \\ \underline{c}_2^T A^2 \\ \underline{c}_3^T A^2 \end{bmatrix}$$

Dans l'expression (4), T est la matrice de changement de base qui permet d'obtenir la forme canonique découplée (la paire (A,B) étant complètement commandable, T se réduit ici à T_2 , cf. chapitre 1). Sa valeur numérique ainsi que celle des matrices F, G , est donnée fig. 2.

La matrice $\hat{K}$, compte tenu de (3), a la forme :

$$\hat{K} = \begin{bmatrix} \hat{k}_{12} & \hat{k}_{11} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \hat{k}_{22} & \hat{k}_{21} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{k}_{32} & \hat{k}_{31} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5)$$

$$F = \begin{bmatrix} -0,96092 & -0,04185 & -0,028 & 0,07693 & 0,44774 & -0,30772 & 0 & 0,08401 \\ 0,19538 & 0,20923 & 0,14 & 0,61538 & -2,23846 & 1,53846 & 0 & -0,42 \\ -0,59452 & -0,2511 & 1,19202 & 0,46158 & 3,28648 & -2,68642 & 0,8 & 0,50405 \end{bmatrix}$$

$$G = \begin{bmatrix} 3077 & 0 & 4049 \\ -15385 & 0 & 32389 \\ 18463 & -5000 & 24294 \end{bmatrix}$$

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0,006 & 0 & 0 & 0 & 0,01 & 0,01 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0,0036 & 0 & -0,0018 & 0 & 0 & 0,0012 & -0,004 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0,00285 & 0 & 0 & 0,00019 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0,06667 & 0 & -0,13333 & 1 & 0,04 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Fig. 2 - Valeurs numériques des matrices F, G et T

La matrice $\hat{L}$ est calculée de telle sorte qu'il n'y ait pas d'erreur statique vis-à-vis d'échelons de consigne sur $\underline{y}_c$. Dans ces conditions, on vérifie aisément que :

$$\hat{L} = \begin{bmatrix} \hat{l}_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \hat{l}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & l_{23} \end{bmatrix} \quad \text{avec} \quad \hat{l}_{ii} = \hat{k}_{i2} \quad (6)$$

Les sous système (3) étant sans numérateur dynamique, on peut appliquer directement les résultats du § 5.2.1 du Chapitre 2 ; on prend alors comme bouclage élémentaire pour chaque sous système :

$$\underline{\hat{k}}_i^T = [q_i \quad 2 \xi_i \sqrt{q_i}]$$

Sur le plan pratique, nous choisirons d'abord l'amortissement ξ_i et nous déterminerons ensuite le paramètre q_i en fonction du temps de réponse souhaité à l'aide des courbes universelles de l'Annexe 2.

En plus des résultats numériques précédents⁽¹⁾, nous rapportons à la Fig. 3 des essais qui mettent en évidence :

- Le découplage : d'un point de vue numérique, on a pu constater sur des listings que les écarts maximum sur les sorties, qui doivent être théoriquement nulles, restent inférieurs à 10^{-5} .

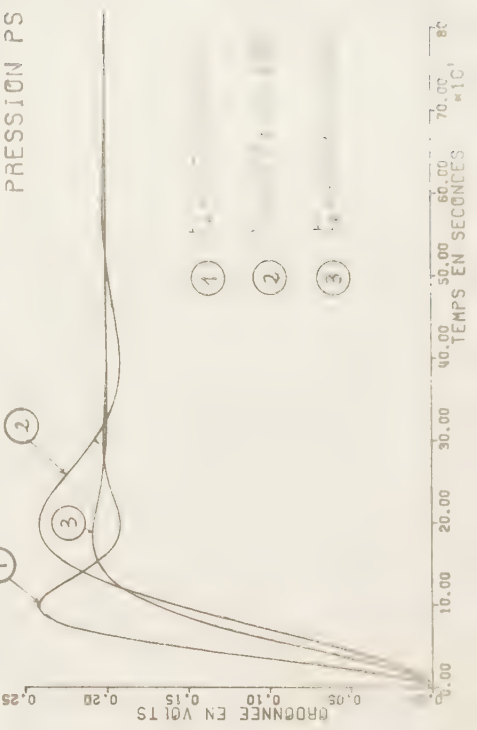
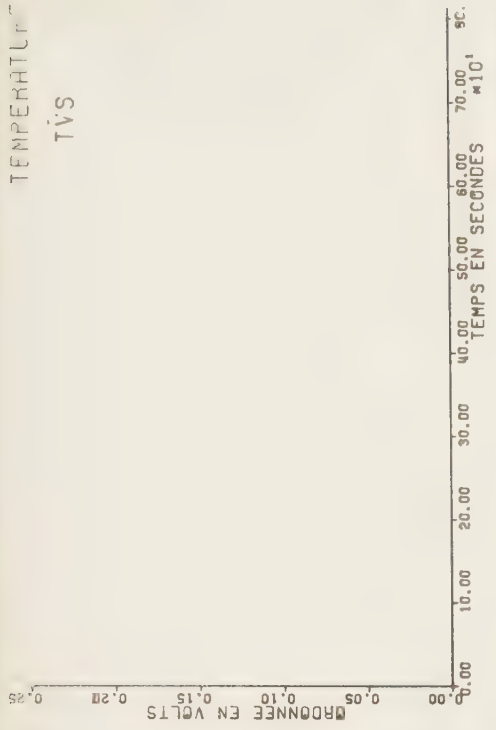
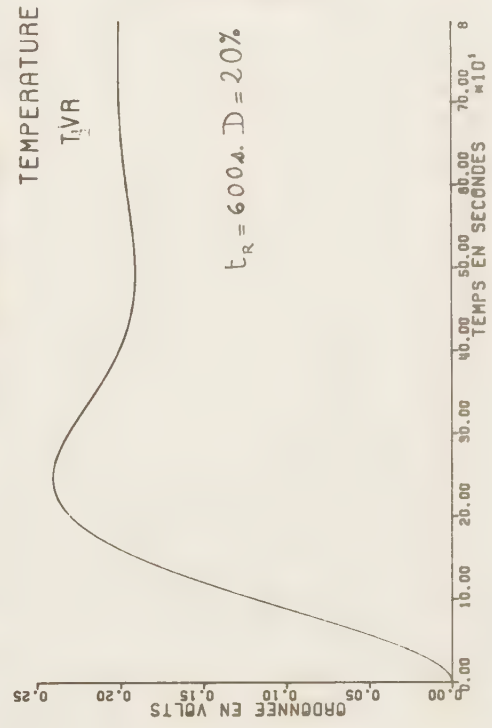
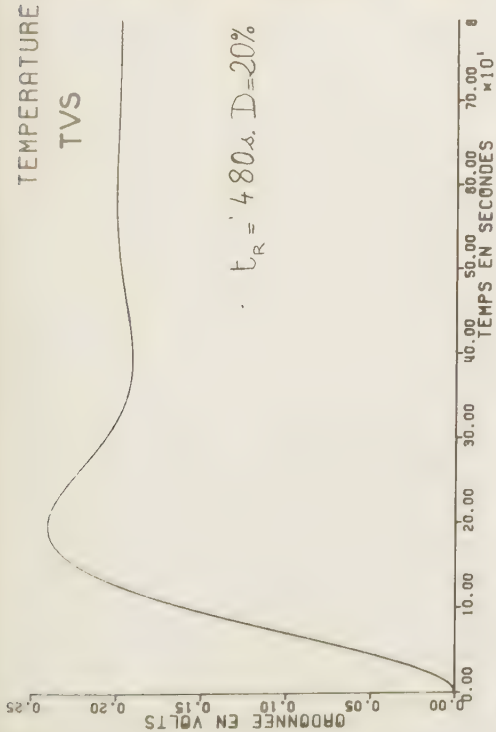
- La facilité de réglage des sous systèmes. Sur des listings numériques, on a constaté également que les performances fixées a priori sur les sorties sont atteintes à moins de 5 secondes près pour les temps de réponse (l'impression des résultats se faisait toutes les 5 secondes) et avec une erreur infime sur les dépassements.

3 - DECOUPLAGE AVEC COMPENSATION DYNAMIQUE

Bien que pour le modèle (1)' précédent, cela ne soit nullement nécessaire, la matrice $\hat{A}_4$ étant stable, nous allons néanmoins utiliser dans ce paragraphe une compensation dynamique essentiellement dans le but de montrer que l'algorithme correspondant donne des résultats satisfaisants.

Rappelons qu'il faut utiliser une compensation dynamique toutes les fois qu'il est nécessaire de supprimer la partie inobservable et invariante de l'état (Cf. Chapitre 1). Cette opération consiste à construire un nouveau système S' pour lequel $p_4' = 0$, à l'aide d'un compensateur dynamique du type suivant.

(1) Tous ces résultats ont été acquis à l'aide d'un programme FORTRAN sur IBM 370 - 135 (Cf. Annexe 1).



- FIG. 3 -

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -31.29235 & 0 & 0.45545 & -106.95127 & +36.68987 & -54.06981 \\ 0 & -17.72151 & 0 & 0.33350 & -57.54622 & 7.49666 & -29.09281 \\ & & & & & & 263.87643 \\ & & & & & & 167.75970 \end{bmatrix}$$
$$K = \begin{bmatrix} 0 & -0.00030 & 0 & 0 \\ 1 & -0.05849 & 0 & 0 \\ 0.21523 & -0.00748 & -0.00046 & -0.09302 \\ 0.05390 & -0.00065 & 0.00290 & -0.05803 \end{bmatrix}$$

Fig. 4 - Valeurs des matrices L et K du compensateur dynamique.

$$\dot{\underline{z}} = \underline{L}\underline{x} + \underline{K}\underline{z} \quad (8)$$

Pour notre exemple, nous avons trouvé $\dim \underline{z} = 4$; les valeurs numériques de $\underline{L}$ et $\underline{K}$ sont données à la Fig. 4.

Le système augmenté S' de dimension 12 est alors défini par :

$$\begin{bmatrix} \dot{\underline{x}} \\ \dot{\underline{z}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{A} & \underline{O} \\ \underline{L} & \underline{K} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \underline{x} \\ \underline{z} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{B} \\ \underline{O} \end{bmatrix} \underline{u} = \underline{A}' \begin{bmatrix} \underline{x} \\ \underline{z} \end{bmatrix} + \underline{B}' \underline{u} \quad (9)$$

$$\underline{y} = [\underline{C} \quad \underline{O}] \begin{bmatrix} \underline{x} \\ \underline{z} \end{bmatrix} = \underline{C}' \begin{bmatrix} \underline{x} \\ \underline{z} \end{bmatrix}$$

Puisque le système (1) est découplable, le système (9) peut lui-même être découplé, la condition nécessaire et suffisante de découplage étant automatiquement vérifiée.

Pour l'exemple choisi, on obtient trois sous systèmes ayant respectivement pour dimensions :

$$\begin{aligned} p_1' &= (d_1 + 1) + r_1' = 4 & r_1' &= 2 \\ p_2' &= (d_2 + 1) + r_2' = 4 & r_2' &= 2 \\ p_3' &= (d_3 + 1) + r_3' = 4 & r_3' &= 2 \end{aligned}$$

Dans ces conditions, il est clair que $p_1' + p_2' + p_3' = 12$ ce qui implique $p_4' = 0$ et par conséquent, il n'y a plus d'états inobservables invariants. Le principal avantage qui en résulte est de pouvoir placer arbitrairement tous les pôles du système. Il faut cependant noter qu'au niveau de la commande, certaines complexités peuvent apparaître.

Les nombres r_i' étant différents de 0 les sous systèmes découplés ont cette fois-ci la forme :

$$[1 \ 0 \ 0 \ 0] \left[\begin{array}{cc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \psi_i & & \phi_i & \end{array} \right] \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \hline \beta_i \end{bmatrix} \quad (10)$$

qui n'est pas particulièrement bien adaptée pour calculer une commande.

Cependant, d'après le Théorème 5 du Chapitre 1, il existe un changement de base V_i' (Fig. 5), qui permet de les mettre sous la forme canonique :

$$[2,9661 \cdot 10^{-4} \quad 0,058492 \quad 1 \quad 0] \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2,9661 \cdot 10^{-4} & -0,058492 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (11)$$

$$V_1' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -41.95077 & -7864.064 & -0.00046 & 263.8764 \\ 3.4538 & 459.9873 & -0.00027 & -15.43474 \\ -0.18958 & -23.57311 & 0 & 0.82454 \end{bmatrix}$$

$$V_2' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -0.05849 \\ 1 & 0 & -0.05849 & 0.00312 \\ -0.05849 & 1 & 0.00312 & -0.00017 \end{bmatrix}$$

$$V_3' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 165.7597 & 9.76654 & -57.54622 & -0.05803 \\ -8.81265 & -0.45428 & 3.36601 & 0.00310 \\ 0.46571 & 1.02427 & -0.17982 & -0.00016 \end{bmatrix}$$

Fig. 5 - Valeurs des matrices de changement de base V_i' .

à laquelle est associée la transmittance

$$\frac{y_i(s)}{v_i(s)} = \frac{s^2 + 0,058492 s + 2,955110^{-4}}{s^2 (s^2 + 0,058492 s + 2,966110^{-4})} \quad (12)$$

La loi de bouclage utilisée pour chaque système (10) serait alors de la forme $\hat{k}_i^T V_i'$; le vecteur $\hat{k}_i^T$ étant calculé à partir de (11), soit :

$$\hat{k}_i^T = [\sigma_{i4} \quad \sigma_{i3} \quad \sigma_{i2} - 2,966110^{-4} \quad \sigma_{i1} - 0,058492] \quad i \in [1, 3]$$

où les σ_{ij} sont les coefficients du polynome caractéristique que l'on souhaite obtenir pour chaque sous système en boucle fermée. ⁽¹⁾

En définitive, la classe des lois de commande qui découplent le système (9) est donc définie par :

$$\underline{u} = (F' - G' \hat{K}' V'^T) \underline{x} + G' \hat{L} \underline{y}_c$$

avec $F' = [F \quad 0]$ $G' = G$

avec, pour F et G les définitions du § 2. T' est une nouvelle matrice de changement de base (Fig. 6) ; V' et $\hat{K}'$ sont des matrices respectivement définies par

$$\begin{aligned} V' &= \text{diag} [V_i] \quad i \in [1, 3] \\ \hat{K}' &= \text{diag} [\hat{k}_i^T] \end{aligned}$$

La matrice $\hat{L}'$ serait déterminée de telle sorte qu'entre y_i et y_{ic} le gain statique soit égal à 1.

Remarque : Tous ces résultats numériques ont été obtenus à l'aide du programme FORTRAN décrit à l'Annexe 1 de ce mémoire.

4 - EXEMPLES DE REGLAGE DE SOUS SYSTEMES DECOUPLES DISCRETS

4.1 - Le sous système est composé uniquement de retards purs en cascade

Considérons le sous système du second ordre défini par :

$$\begin{aligned} \hat{x}_{k+1} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \hat{x}_k + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} v_k \\ y_k &= [1 \quad 0] \hat{x}_k \end{aligned} \quad (13)$$

(1) Les sous systèmes découplés ayant cette fois-ci un numérateur dynamique, le réglage pourrait alors être envisagé par les techniques fréquentielles.

Choisissons un "système continu équivalent" du second ordre dont les performances indicielles seront les suivantes :

- Temps de réponse (à 2 % de la valeur finale) : 240 s.
- Dépassement : 20 %

Soit :

$$\begin{aligned} \dot{\underline{t}} &= \begin{bmatrix} 0 & \\ -1,28410^{-3} & -3,22510^{-2} \end{bmatrix} \underline{t} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} w \\ y &= \begin{bmatrix} 1,28410^{-3} & 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (14)$$

Ce système sera échantillonné avec une période de 20 sec. et nous envisagerons successivement les deux hypothèses :

- Le pas d'échantillonnage est faible
- Le pas d'échantillonnage est quelconque

puis nous comparerons les résultats ainsi obtenus, avec le "modèle" que l'on s'est donné à partir de (14).

4.1.1 - Le pas d'échantillonnage est faible

Le modèle discret équivalent de (14), vis-à-vis d'un échelon d'entrée, est dans ces conditions :

$$\underline{t}_{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0,5247 & 1,162 \end{bmatrix} \underline{t}_k + \begin{bmatrix} 0 \\ 0,3267 \end{bmatrix} w_k \quad (15)$$

$$y_k = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \underline{t}_k$$

ou bien sous forme de fonction de transfert

$$\frac{y(z)}{w(z)} = \frac{0,3267}{z^2 - 1,162z + 0,5247}$$

La loi de commande qu'il faut appliquer au système (13) est alors donnée immédiatement par :

$$\underline{v}_k = -\hat{\underline{k}}^T \hat{\underline{x}}_k + \hat{\ell} w_k$$

avec $\hat{\underline{k}}^T = [0,5247 \quad -1,162] \quad \hat{\ell} = 0,3267$

et le système en boucle fermée ainsi obtenu est donc bien identique à (15).

Admettons que le pas d'échantillonnage est quelconque

Sous cette hypothèse, le modèle discret équivalent de (14) peut s'écrire :

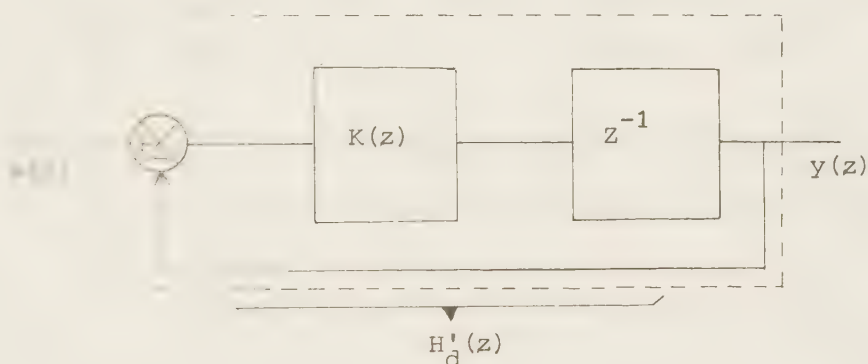
$$\underline{t}_{k+1}' = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -0,5247 & 1,162 \end{bmatrix} \underline{t}_k' + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} w_k$$

$$y_k = [0,1617 \quad 0,201] \underline{t}_k'$$

ou sous forme de fonction de transfert

$$\frac{y(z)}{w(z)} = H_d(z) = \frac{0,1617 + 0,201z}{z^2 - 1,162z + 0,5247}$$

On souhaite atteindre pour le système (13) la structure en boucle fermée suivante :



D'après les résultats du Chapitre 3, le réseau correcteur $K(z)$ sera physiquement réalisable si et seulement si le numérateur de $H_d'(z)$ contient z^{-1} au moins à la puissance 2. Nous choisirons donc pour $H_d'(z)$

$$H_d'(z) = H_d(z) \cdot z^{-1}$$

Dans ces conditions $K(z)$ est alors donné par :

$$K(z) = \frac{0,201 + 1,617z^{-1}}{1 - 1,363z^{-1} + 0,363z^{-2}}$$

Si on désire un correcteur dans l'espace d'état, on pourra vérifier aisément qu'une solution possible consiste à utiliser le compensateur dynamique

$$\lambda_{k+1} = \begin{bmatrix} 0 & -0,5247 \end{bmatrix} \hat{\underline{x}}_k + 1,162\lambda_k + 0,3953 w$$

$$v_k = \lambda_k + 0,201 w_k$$

(17)

la fonction de transfert en boucle fermée ainsi obtenue est effectivement :

$$\frac{y(z)}{w(z)} = \frac{0,1617 + 0,201z}{z(z^2 - 1,162z + 0,5247)} \quad (18)$$

La Fig. 7 regroupe trois essais indiciels qui concernent :

- Le système continu (14) qui sert de référence
- Le système discret (15)
- Le système discret (13), piloté par (17)

On remarquera que les trois dépassements indiciels sont très sensiblement identiques, tandis que les temps de réponse des systèmes discrets retardent chacun d'un pas d'échantillonnage sur le temps de réponse du système continu. On remarquera également que la réponse indicielle de (18) est identique comme prévu à celle de (14), à une translation d'un pas d'échantillonnage près. Nous noterons cependant qu'il n'y a pas une différence suffisamment importante entre les deux réponses discrètes pour qu'on puisse justifier l'utilisation d'un compensateur dynamique du type (17), bien que le pas d'échantillonnage ne puisse pas être rigoureusement considéré comme faible. On pourrait donc n'utiliser ici qu'un simple bouclage sur l'état, ce qui simplifierait le correcteur.

4.2 - Le sous système comporte un numérateur dynamique

Nous prendrons comme exemple le système suivant :

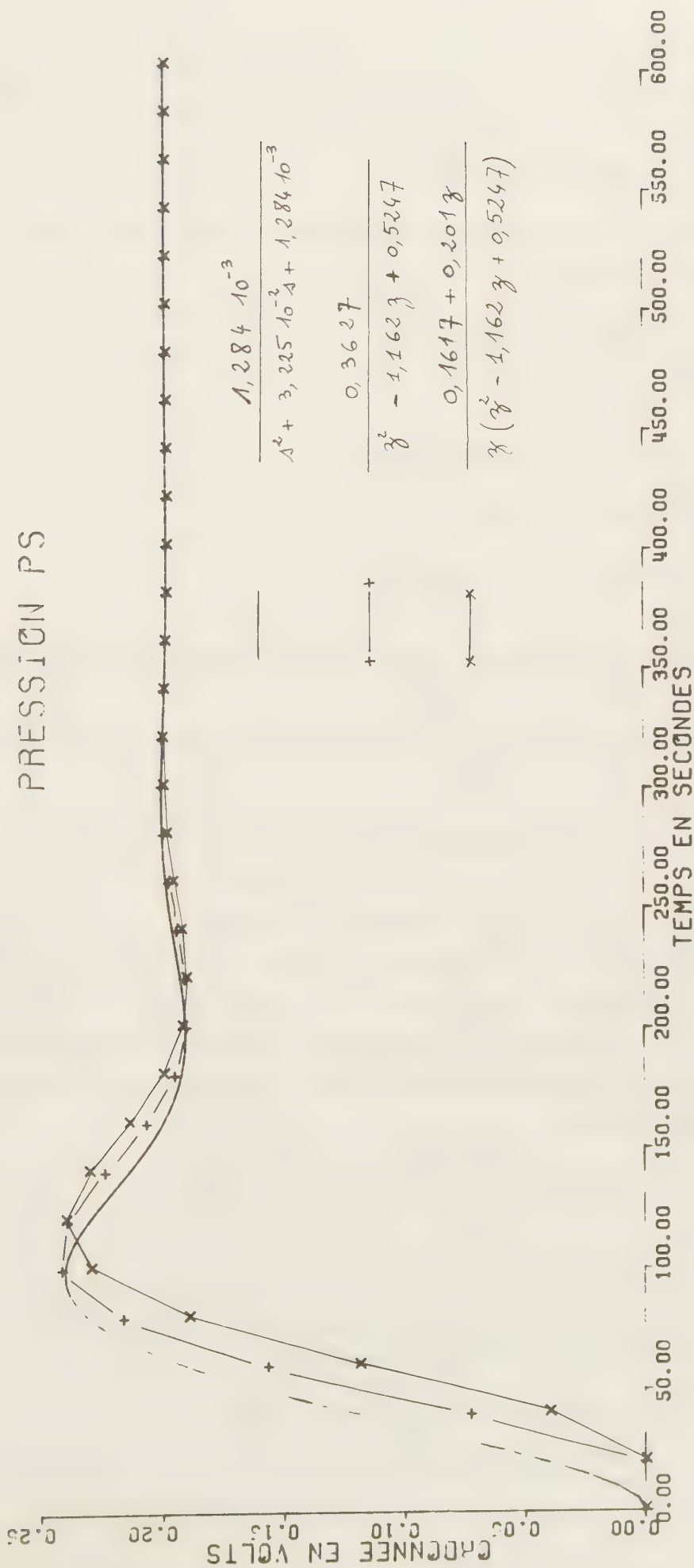
$$\begin{aligned} \hat{x}_{k+1} &= \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \hat{x}_k + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} v_k \\ y_k &= \begin{bmatrix} 2 & 1 \end{bmatrix} \hat{x}_k \end{aligned} \quad (19)$$

dont la fonction de transfert est :

$$\frac{y(z)}{w(z)} = \frac{z+2}{z(z+2)}$$

Remarquons que le pôle -2 étant à l'extérieur du cercle unité, il est impossible, sous peine d'instabilité ultérieure de simplifier numérateur et dénominateur par $z+2$. Ce fait ne facilite évidemment pas le calcul de la commande qui, rappelons le, doit permettre d'obtenir un système en boucle fermée ayant des performances indicielles proches de celles qu'on se donne a priori.

Celles-ci seront fixées, pour cet exemple, sous forme d'une séquence de points, obtenue par échantillonnage, avec un pas de 0,5 seconde, de la réponse indicielle du système continu de Butterworth du troisième ordre (Cf. Chapitre 2, Fig. 6) $H(s) = \frac{1}{s^3 + 2s^2 + 2s + 1}$



- Figure 7 -

La première idée qui vient à l'esprit est de chercher si on peut obtenir un résultat satisfaisant en utilisant un simple bouclage sur l'état. Autrement dit, existe-t-il ici, α et β tels que la réponse indicielle de $\frac{z+2}{z^2+\alpha z+\beta}$ approche convenablement la séquence précédente ?

En général, une solution aussi simple n'existe pas, aussi nous opérons de la façon suivante.

Dans une première étape, on stabilise le système par un premier bouclage sur l'état. Nous le choisirons, par exemple, de telle sorte que les pôles soient égaux à -0,5. Soit :

$$v_k = [0,25 - 3] \hat{x}_k + v'_k$$

La fonction de transfert ainsi obtenue est :

$$\frac{y(z)}{v'(z)} = G(z) = \frac{z+2}{z^2-z+0,25}$$

Dans une seconde étape, on cherche le réseau correcteur qu'il faut utiliser.

Après correction, on obtient une fonction de transfert en boucle fermée

$$\frac{y(z)}{w(z)} = H_d(z) = \frac{(1+2z^{-1})(b_0+b_1z^{-1}+\dots)}{1+a_1z^{-1}+a_2z^{-2}+\dots} \quad (21)$$

Sur le plan pratique, on détermine les coefficients a_i et b_i de (21) par PNL de telle sorte que sa réponse indicielle approche au mieux celle qu'on s'est donnée précédemment. Remarquons qu'on a tout intérêt à limiter, dans la mesure du possible, l'ordre des développements, pour éviter d'avoir un correcteur trop complexe. Nous avons trouvé, pour l'exemple choisi, qu'une solution convenable pouvait être :

$$H_d(z) = \frac{z^{-1}(1+2z^{-1})(0,0231+0,00178z^{-1})}{1-2,025z^{-1}+1,47z^{-2}-0,3704z^{-3}}$$

Nous noterons que cette fonction $H_d(z)$ vérifie bien les restrictions, mentionnées au chapitre 3, qui concernent la réalisabilité physique du correcteur et la stabilité du système en boucle fermée.

Le réseau correcteur est alors donné par :

$$K(z) = \frac{1}{G(z)} \frac{H_d(z)}{1 - H_d(z)}$$

RÉPONSES INDICIELLES

.0	0.62990-03	-.62990-03
.26000-01	0.26020-01	-.18140-04
.12400 00	0.12380 00	0.22280-03
.28800 00	0.28780 00	0.23790-03
.48500 00	0.48540 00	-.44190-03
.68100 00	0.68080 00	0.21970-03
.84600 00	0.84640 00	-.37040-03
.96800 00	0.96770 00	0.34510-03
.10420 01	0.10420 01	-.10790-03
.10760 01	0.10760 01	0.13400-03
.10800 01	0.10800 01	0.32550-03
.10650 01	0.10650 01	-.33130-03
.10430 01	0.10430 01	-.19690-03
.10210 01	0.10210 01	0.11810-03
.10030 01	0.10030 01	0.67450-04
.99100 00	0.99120 00	-.20170-03
.98600 00	0.98560 00	0.42480-03
.98500 00	0.98480 00	0.21780-03
.98700 00	0.98710 00	-.10380-03
.99100 00	0.99090 00	0.11420-03
.99500 00	0.99480 00	0.16400-03
.99800 00	0.99810 00	-.13290-03
.10000 01	0.10000 01	-.40120-03
.10020 01	0.10020 01	0.39040-03
.10020 01	0.10020 01	0.57740-04
.10020 01	0.10020 01	0.32050-03
.10010 01	0.10010 01	-.10600-03
.10000 01	0.10000 01	-.45430-03
.10000 01	0.99990 00	0.11910-03
.99900 00	0.99950 00	-.46560-03

Modèle

$H_d(z)$

Ecart

Figure 8 : Comparaison des réponses indicielles du modèle et de la fonction de transfert $H_d(z)$ obtenue par PNL.

Soit :

$$K(z) = \frac{(1-z^{-1}+0,25z^{-2})(0,023+0,00178z^{-1})}{1-2,048z^{-1}+1,42z^{-2}-0,374z^{-3}}$$

Si on désire effectuer la synthèse du système de commande dans l'espace d'état, on pourra utiliser le compensateur dynamique

$$\lambda_{k+1} = [-0,3704 \quad 1,47] \hat{x}_k - 2,025 \lambda_k + 0,0195 w_k$$

$$v'_k = [0,25 \quad -1] \hat{x}_k + \lambda_k + 0,0178 w_k$$

On vérifiera que la fonction de transfert en boucle fermée ainsi obtenue à partir du système en boucle ouverte (19) est effectivement $H_d(z)$. Une comparaison des réponses indicielles du modèle et de $H_d(z)$ est par ailleurs donnée figure 8.

5 - CONCLUSION

La mise en oeuvre pratique sur processus réel de n'importe quel système de commande nécessite, comme phase préalable, une étude en simulation. Plus le processus est complexe et plus cette étude doit être poussée pour essayer d'obtenir "*hors ligne*" le maximum de renseignements sur les possibilités que l'on peut en attendre. Dans ces conditions, il apparaîtra au lecteur que ce chapitre n'a pas eu cette ambition. Nous avons en effet limité volontairement le nombre des résultats numériques et surtout des simulations, qui y sont rapportés. Rappelons toutefois que le but essentiel était de tester principalement la validité de l'algorithme de calcul numérique et également d'illustrer par quelques exemples certains aspects de la théorie développée antérieurement.

Néanmoins, nous signalerons qu'une étude complète du système de commande a été effectuée en simulation tant par voie purement numérique qu'hybride [1]

Sans être exhaustif, nous mentionnerons que cette étude a permis notamment d'examiner le comportement prévisible des organes réglants et de voir qu'il était a priori compatible avec les contraintes physiques du processus. Elle a, par ailleurs, permis d'analyser le comportement dynamique du processus, et en particulier sa stabilité, lorsqu'on applique la commande non pas globalement, mais "*chaîne par chaîne*", le processus étant primitivement piloté par des régulations analogiques classiques.

Il est clair cependant que l'étude en simulation, bien que nécessaire pour dégrossir le problème, est insuffisante en elle-même pour valider le système de commande, et que seule l'application en réel permet finalement de le faire. Nous allons d'ailleurs maintenant aborder au chapitre suivant l'analyse des performances obtenues en réel en utilisant le système de commande numérique à découplage optimal.

- BIBLIOGRAPHIE -

- [1] J. DESCUSSE "Hybrid Test of an Optimal Decoupling Control Algorithm"
J. BOUMARD, Congrès A.I.C.A. de Rome, Nov. 1974, Edit. Tamburini Milano.
D. SARLAT
P. MEZENCEV

CHAPITRE 5

RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX OBTENUS EN CENTRALE THERMIQUE EDF

- 1 - Introduction
- 2 - Description du processus
- 3 - Modèle mathématique
- 4 - Mise en place de la commande
- 5 - Résultats expérimentaux
- 6 - Conclusion

Résumé :

Le chapitre 5 traite de la mise en oeuvre pratique d'un système de régulation numérique, basé sur les techniques de non interaction, sur un processus industriel, en l'occurrence la chaîne de surchauffe - resurchauffe de la Tranche 5 de 250 MW de la Centrale Thermique de Nantes-Cheviré. A travers l'examen des résultats expérimentaux effectués dans des conditions variées, on analyse la validité de l'algorithme utilisé, par comparaison avec des résultats analogues obtenus avec les régulations classiques déjà existantes : l'avantage principal de l'algorithme, pour un utilisateur, réside sans aucun doute dans son aspect conversationnel qui permet de modifier à volonté et en ligne les performances dynamiques du processus.

1 - INTRODUCTION

Quelle que soit la méthode de régulation envisagée, celle-ci ne peut être considérée comme valable que si l'application qu'on en fait sur processus réel se révèle satisfaisante. Le but de ce chapitre est donc de montrer que les résultats théoriques développés précédemment et l'algorithme qui en a découlé ont satisfait cet impératif lors d'une expérimentation en vraie grandeur.

Ce travail se situe en fait dans le cadre général d'un contrat de recherche, mené par toute une équipe, en vue d'expérimenter en vraie grandeur des méthodes de régulation numérique, basées sur des techniques développées dans l'espace d'état et utilisant des modèles simples de dimension réduite [1]. Nous nous contenterons ici de rapporter la partie de ce contrat qui nous incombait. A cet effet, dans ce qui suit, nous distinguerons quatre parties :

- Une description de l'installation (paragraphe 2)
- La définition du processus à réguler sous forme d'un modèle mathématique (paragraphe 3)
- La mise en place du système de régulation proprement dit, avec le problème de la reconstruction de l'état et celui de l'élimination du statisme (paragraphe 4)
- Les résultats expérimentaux en exploitation (paragraphe 5).

2 - DESCRIPTION DE L'INSTALLATION

La Tranche 5 de la Centrale de Nantes-Cheviré d'une puissance de 250 MW est un ensemble autonome comprenant trois installations principales :

- un générateur de vapeur,
- un groupe turbo-alternateur,
- un transformateur.

Le générateur de vapeur construit par "Fives Penhoët", alimenté en fuel, a les caractéristiques suivantes :

Débit de vaporisation	735 t/h
Température de la vapeur surchauffée	565°C
Température de la vapeur resurchauffée	565°C
Pression de la vapeur surchauffée	165 bars
Pression de la vapeur resurchauffée	35 bars

La vapeur fournie par la chaudière se détend dans les différents étages des parties haute, moyenne et basse pression de la turbine. En fin de détente, la vapeur est refroidie dans un condenseur alimenté par l'eau de la Loire. Avant d'alimenter à nouveau le générateur de vapeur, l'eau condensée est réchauffée progressivement dans des réchauffeurs utilisant de la vapeur soutirée en différents points de la turbine.

L'alternateur entraîné par la turbine (groupe "C.E.M. de 250 MW) à la vitesse de 3 000 t/mn fournit l'énergie électrique au transformateur qui porte sa tension de 20 000 V à 220 000 V.

Sur cette installation, nous nous sommes intéressés au circuit de vapeur. Le schéma simplifié ci-après nous donne le trajet de la vapeur dans les différents surchauffeurs et resurchauffeurs et les trois étages de la turbine.

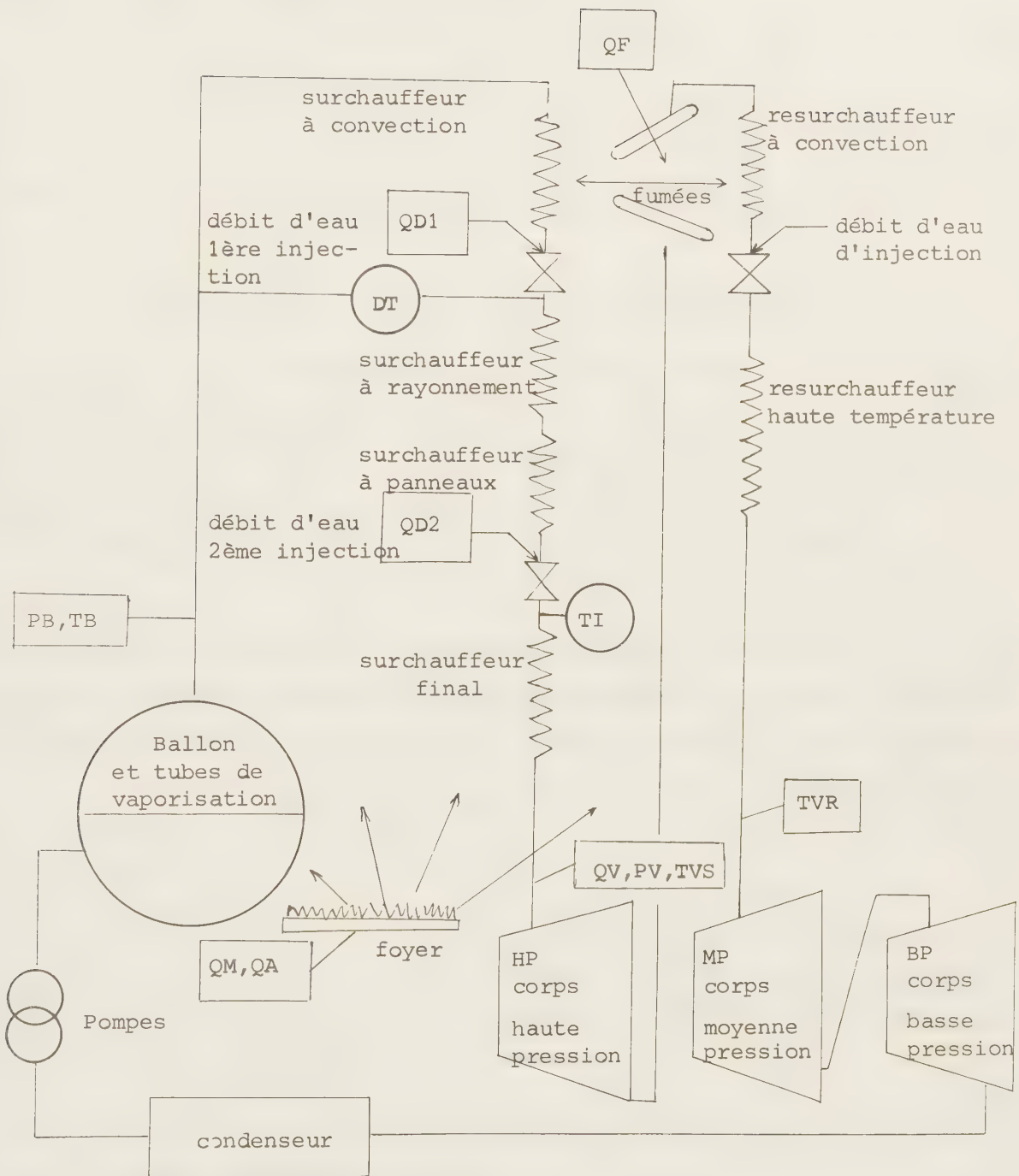


Fig. 1

Schéma de principe du circuit de vapeur

Le problème de régulation concerne un système à trois sorties à contrôler :

PS : Pression de vapeur surchauffée à l'admission du corps HP

TVS : Température de vapeur surchauffée à l'admission du corps HP

TVR : Température de vapeur resurchauffée à l'admission du corps MP.

Les grandeurs d'action que nous considérons sont :

CQM : la consigne de l'asservissement du débit de mazout (à laquelle est lié le réglage de combustion)

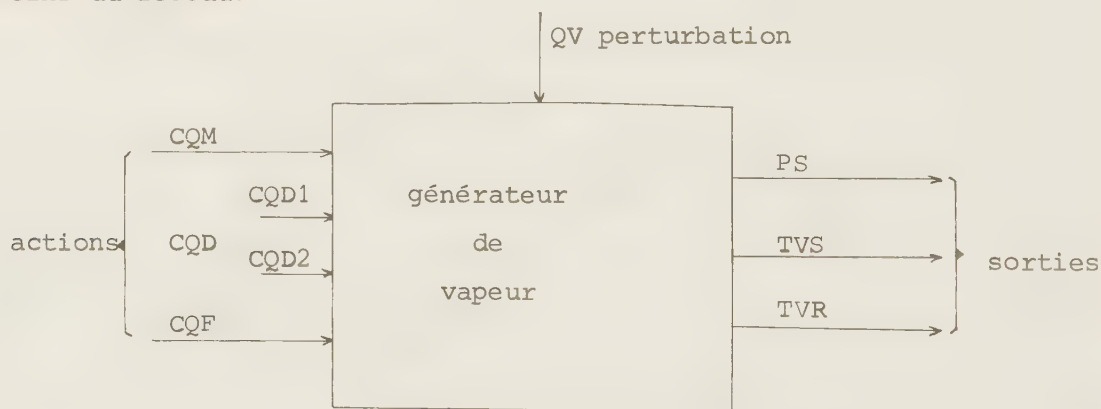
CQD1 : la consigne de l'asservissement du débit d'eau de première injection

CQD2 : la consigne de l'asservissement du débit d'eau de deuxième injection

CQF : la consigne de l'asservissement du débit des fumées.

Remarque : Bien qu'il soit possible d'agir séparément sur les consignes d'injection CQD1 et CQD2, un dispositif analogique permet de considérer une consigne de désurchauffe globale CQD, les injections QD1 et QD2 étant alors élaborées par un dispositif complexe tenant compte des saturations éventuelles et des contraintes de température, en respectant sensiblement l'égalité $QD1 + QD2 = CQD$.

La perturbation principale est le débit de vapeur QV à l'admission du corps haute pression : QV dépend essentiellement des variations de l'ouverture soupape elle-même commandée par la puissance demandée à la Tranche en fonction des besoins du réseau.



On dispose, en outre, de divers points de mesures complémentaires :

PSC : consigne de pression vapeur

QM : débit mazout

PB : pression de vapeur au ballon

TVSC : consigne de température de surchauffe

TI TID : température intermédiaire droite de surchauffe

TIG : température intermédiaire gauche de surchauffe

QD1	: débit d'eau de première injection
QD2	: débit d'eau de deuxième injection
DTD	: écart de température entre le ballon et l'entrée du surchauffeur à rayonnement droit
DTG	: écart de température entre le ballon et l'entrée du surchauffeur à rayonnement gauche
QV	: débit de vapeur à l'entrée de la turbine
TB	: température ballon
TVRC	: consigne de température de resurchauffe
QF	: débit des fumées orientées sur les resurchauffeurs
W	: puissance du groupe turbo-alternateur

A ce stade, il est bon d'indiquer 3 phénomènes importants contre lesquels on ne peut rien et qui limitent la validité de tout modèle linéaire stationnaire, et donc influent grandement sur la régulation.

- Le poste haute pression de réchauffage d'eau alimentaire a été très souvent défaillant (peut-être 40 % du temps). Dans ce cas, il résulte que la première injection d'eau de désurchauffe n'est plus une grandeur indépendante et seule pratiquement la seconde injection permet la régulation alors qu'en fonctionnement normal (avec poste HP) ce rôle est dévolu à la première injection.

- Le débit de fumées QF est réglé à l'aide de volets de répartition qui ne comportent pas de positionneur, ce qui laisse cette action fortement non linéaire (asymétrie + point dur).

- Les sorties sont évidemment très sensibles à la combustion. Or, au moins deux informations ne sont pas prises directement en compte : la mise en route ou l'extinction de brûleurs, la modification manuelle de l'opacité des fumées imposée par des règlements anti-pollution.

3 - DEFINITION DU MODELE MATHEMATIQUE

A partir à la fois de la structure du système (évaporateurs et surchauffeurs en cascade) et des lois thermodynamiques élémentaires, MM. Ph. De LARMINAT et J.M. PIASCO [2] ont établi un modèle de tendance (fig. 2) dont les coefficients ont été déterminés à l'aide d'un programme général de filtrage non linéaire appliqué à l'identification des systèmes multientrées-monosortie.

Toutes les grandeurs qui interviennent dans ce modèle sont exprimées dans une échelle 0-10v. Il est néanmoins facile de revenir aux unités physiques

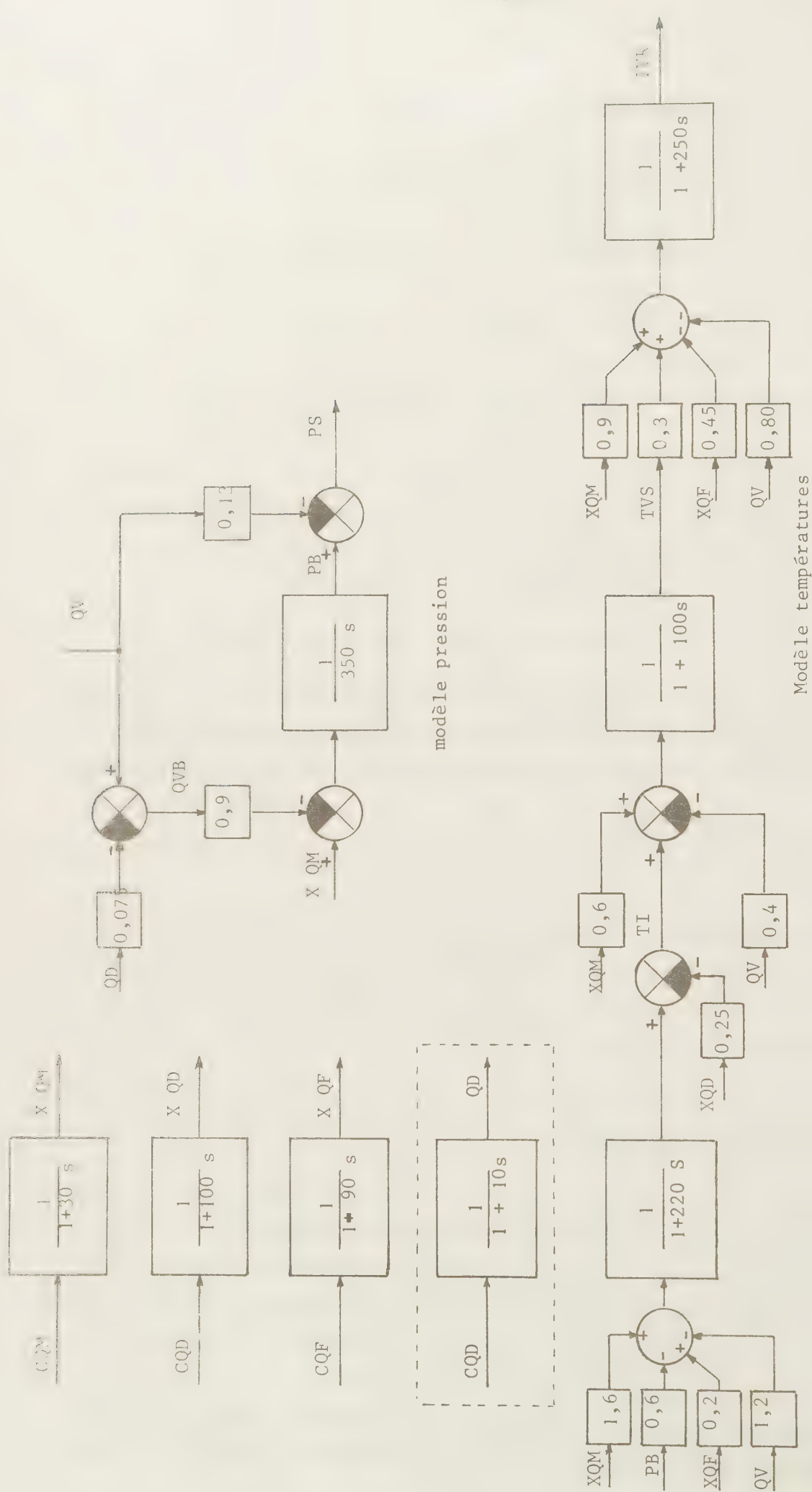


Fig. 2 - Modèle d'état continu correspondant à la campagne d'essais du 14.10.74

en se reportant au tableau de conversion suivant :

grandeurs	0 - 10 volts
TI, TVS, TVR	300 - 600°
CQD	0 - 60 T/h
CQM	0 - 70 T/h
CQF	0 - 100 %
QV	0 - 800 T/h
PS, PB	0 - 200 bars

L'intérêt de la structure de ce modèle, outre sa faible dimension, est de simplifier considérablement le problème de la reconstruction du vecteur d'état, imposé par le type de commande envisagé (découplage par retour d'état). L'examen du modèle montre, en effet, que sur 8 états (sortie des intégrateurs ou des constantes de temps) quatre sont mesurés directement TI, TVS, TVR, PS. Les quatre autres notés XQM, XQD, XQF, QD, se présentent comme la sortie de quatre constantes de temps attaquées directement par les entrées du système. Compte tenu de l'ordre de grandeur de ces constantes de temps, on peut considérer qu'un simple modèle en boucle ouverte de celles-ci pouvait constituer un reconstituteur satisfaisant.

Néanmoins, il faut ajouter un problème annexe à la reconstruction d'état : on a, en effet, introduit dans le modèle des entrées inconnues a priori $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4$ destinées à rendre compte du point de fonctionnement statique du système. Les variations de ce point de fonctionnement en fonction de la charge ou les non stationnarités amènent à considérer les ζ_i comme des perturbations constantes par morceaux ou lentement variables dans le temps, qu'il est nécessaire d'estimer pour en tenir compte dans le calcul de la commande afin d'obtenir une régulation astatique (cf. §4).

Les équations d'état linéarisées du modèle continu ont la forme :

$$\begin{aligned} \dot{\underline{x}} &= A \underline{x} + B \underline{u} + \underline{p} \cdot q_V + \underline{\zeta} \\ \underline{y} &= C \underline{x} \end{aligned} \tag{1}$$

où $\underline{x}$ est un vecteur de dimension 8, $\underline{y}$ et $\underline{u}$ des vecteurs de dimension 3 ; q_V représente la perturbation principale et $\underline{\zeta}$ la perturbation inconnue précédente.

$$\underline{x} = \begin{bmatrix} x_{ip} \\ x_{id} \\ x_{if} \\ i/l \\ -1 \\ t_{VS} \\ t_{VR} \\ p_S \end{bmatrix} \quad \underline{u} = \begin{bmatrix} C_{qm} \\ C_{qd} \\ C_{qf} \end{bmatrix} \quad \underline{y} = \begin{bmatrix} t_{VS} \\ t_{VR} \\ p_S \end{bmatrix} \quad \underline{z} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \zeta_3 \\ \zeta_4 \end{bmatrix}$$

Les lettres minuscules représentent des écarts par rapport aux valeurs moyennes correspondant au point de fonctionnement nominal de la Tranche.

Les valeurs numériques des matrices A , B , C et $\underline{p}$ sont données fig. 3.

$$A = \begin{bmatrix} -3333.10^{-5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1000.10^{-5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1111.10^{-5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -10^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 727.10^{-5} & 136.10^{-5} & 91.10^{-5} & 0 & -455.10^{-5} & 0 & 0 & -273.10^{-5} \\ 600.10^{-5} & 0 & 0 & 0 & 1000.10^{-5} & 0 & 0 & 0 \\ 360.10^{-5} & 0 & -180.10^{-5} & 0 & 0 & -1000.10^{-5} & 0 & 0 \\ 285.10^{-5} & 0 & 0 & 19.10^{-5} & 0 & 120.10^{-5} & -400.10^{-5} & 0 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 3333.10^{-5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1000.10^{-5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1111.10^{-5} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 10^{-1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -250.10^{-5} & 0 & -581.10^{-5} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -400.10^{-5} & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -320.10^{-5} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -257.10^{-5} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Fig. 3 - Modèle 8 états continu correspondant à la campagne d'essais du 14/10/74.

4 - MISE EN PLACE DE LA COMMANDE-ELIMINATION DU STATISME

La classe des lois de commande qui découple le système (1) est donnée par le théorème 4 du chapitre 1. Elle est de la forme :

$$\underline{u} = (F - G\hat{K}T)\underline{x} + G\hat{L}\underline{y}_C - G\hat{M}T(\underline{p} \cdot \underline{q}_V + \underline{\xi}) \quad (2)$$

F, G et T sont des matrices issues de la théorie du découplage, et ont été définies au chapitre 1. En particulier, $F = -D^{-1}A^*$ et $G = D^{-1}$. Les valeurs numériques de ces matrices sont données fig. 4.

Le découplage du système (1) par la loi de commande (F;G) précédente conduit à 3 sous-systèmes d'intégrateurs purs du second ordre ayant respectivement pour sorties t_{VS} , t_{VR} et p_S , et à un sous-système du second ordre inobservable mais stable, fig. 5.

Ces trois sous-systèmes d'intégrateurs sont pilotés suivant la technique développée au chapitre 2, ce qui conduit à une matrice $\hat{K}$:

$$\hat{K} = \begin{bmatrix} \hat{k}_{11} & \hat{k}_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \hat{k}_{21} & \hat{k}_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{k}_{31} & \hat{k}_{32} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Les matrices $\hat{L}$ et $\hat{M}$ sont calculées de telle sorte que la sortie $\underline{y}$ égale sa consigne $\underline{y}_C$ quand le système est en régime permanent. On vérifie aisément que :

$$\hat{M} = \begin{bmatrix} \hat{m}_{11} & \hat{m}_{12} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \hat{m}_{21} & \hat{m}_{22} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \hat{m}_{31} & \hat{m}_{32} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \hat{L} = \begin{bmatrix} \hat{l}_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \hat{l}_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \hat{l}_{33} \end{bmatrix}$$

avec

$$\begin{aligned} \hat{k}_{11} &= q_1 & \hat{k}_{12} &= 2 \xi_1 \sqrt{q_1} \\ \hat{k}_{21} &= q_2 & \hat{k}_{22} &= 2 \xi_2 \sqrt{q_2} \\ \hat{k}_{31} &= q_3 & \hat{k}_{32} &= 2 \xi_3 \sqrt{q_3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{m}_{11} &= \hat{k}_{12} & \hat{m}_{12} &= 1 \\ \hat{m}_{21} &= \hat{k}_{22} & \hat{m}_{22} &= 1 \\ \hat{m}_{31} &= \hat{k}_{32} & \hat{m}_{33} &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \hat{l}_{11} &= \hat{k}_{11} \\ \hat{l}_{22} &= \hat{k}_{21} \\ \hat{l}_{33} &= \hat{k}_{31} \end{aligned}$$

F =	- 0,96092 0,19538 -0,59452	- 0,04185 0,20923 - 0,2511	- 0,028 0,14 1,19202	0,07693 0,61538 0,46158	0,44774 -2,23846 3,28648	- 0,30772 1,53846 - 2,68642	0 0 +0,8	0,08401 -0,42 +0,50405
G =	3077 -15385 18463	0 0 - 5000	4049 32389 24294					
T =	0 0,006 0 0,0036 0 0,00285 0 -0,06667	0 0 0 0 0 1 0 0	0 0 0 - 0,0018 0 0 0 -0,13333	0 0 0 0 0,00019 0 1 0	0 0,01 0 0 0 0 0,04	1 - 0,01 0 0,0012 0 0 0 0	0 0 1 -0,004 0 0 0 0	0 0 0 0 1 0 0 0

N.B. : Les matrices F, G et T ont été obtenues par programmes sur IBM 370-135 [7]

Fig. 4 - Valeurs des matrices F, G et T.

$\hat{\underline{\zeta}}$ est une estimation de $\underline{\zeta}$, que l'on traite dorénavant comme une perturbation connue. Sans entrer dans le détail de l'estimation des ζ_i , on peut concevoir qu'à partir du moment où tous les autres signaux sont mesurés ou reconstruits, l'estimation des ζ_i ne pose pas de problème particulier. En voici le principe :

Le vecteur $\underline{\zeta}$ est tel que

$$\underline{\zeta} = \dot{\underline{x}} - A\underline{x} - B\underline{u} - \underline{p}q_V \quad (4)$$

et est donc inconnu puisque $\dot{\underline{x}}$ n'est pas connu. On cherche alors une estimation $\hat{\underline{\zeta}}$ de $\underline{\zeta}$, de telle sorte qu'en régime permanent :

$$\hat{\underline{\zeta}} = - A\underline{x} - B\underline{u} - \underline{p}.q \quad (5)$$

Une solution simple consiste à écrire

$$\hat{\zeta}_i = \frac{1}{1+sT_i} [s\underline{x} - A\underline{x} - B\underline{u} - \underline{p}.q_V]^{i+4} \quad (6)$$

où $[.]^{i+4}$ représente la $(i+4)^e$ ligne de (4). Un tel filtre vérifie évidemment la condition (5). Etant donné la faiblesse du pas d'échantillonnage (5s), la loi de commande continue (2) a été appliquée directement sur le processus muni de bloqueurs d'ordre 0, ce qui revient en fait à appliquer les résultats du chapitre 3 (paragraphe 5).

Le système de régulation est alors schématisé fig. 6.

D'un point de vue pratique, le régulateur (2) et l'estimateur ont été implantés paramétriquement dans le calculateur T 2000/20 placé en ligne avec le processus [3], en ce sens que :

- On entre dans le calculateur, à l'aide de la télétype, le temps de réponse et le dépassement choisis pour chaque sortie. Le calculateur détermine alors les matrices intervenant dans (2), F, G et T étant rentrés par bande perforée une fois pour toutes.

- De même, pour l'estimateur, les constantes de temps sont accessibles directement par dialogue avec la télétype.

On doit noter que cette implantation en ligne du régulateur et de l'estimateur ont grandement facilité la mise au point de cet algorithme. Les valeurs des paramètres que nous avons retenues comme satisfaisantes sont les suivantes :

	TVS	TVR	PS
$t_{\text{rép.}}$	480 s	660 s	240 s
ζ_i	1	1	1

5 - RESULTATS EXPERIMENTAUX OBTENUS SUR SITE

Pour pouvoir analyser efficacement les performances de la régulation numérique, mise en place sur le site, nous avons adjoint, dans ce paragraphe, comme élément de référence une campagne d'essais obtenue avec la régulation analogique existante. Nous examinerons, pour ces deux types de régulation, les réponses de la Tranche pour diverses conditions expérimentales qui sont :

- Fonctionnement en télé réglage. C'est, pour ce type de Centrale, le fonctionnement nominal. Le signal de puissance est, dans ce cas, aléatoire et évolue $\pm 10\%$ autour d'une valeur moyenne qui vaut classiquement 220 MW. Lorsque le poste HP de réchauffage d'eau alimentaire est déficient, cette valeur moyenne est de 200 MW.

- Essais en grands transitoires. La courbe de puissance en fonction du temps est celle de la figure 7. On peut dire qu'il s'agit là d'essais en rampe (qui correspondent aux montée et baisse de charge quotidiennes) et en échelons de charge (qui correspondent à des baisses rapides de charge sur incidents).

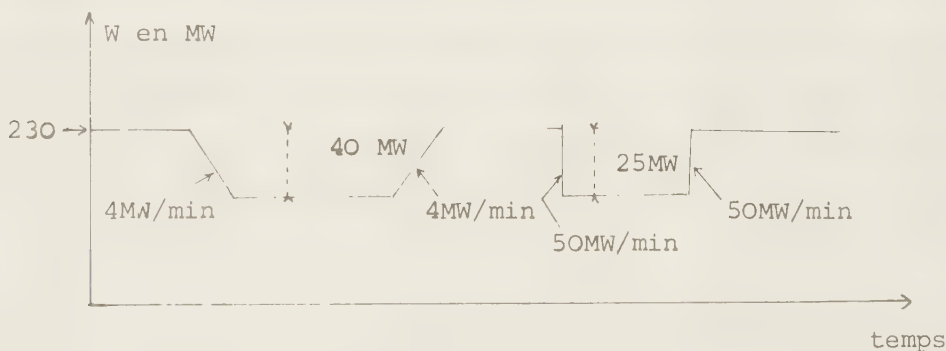


Fig. 7

- Essais en échelons de consigne. Bien que ce fonctionnement soit accessoire en régulation, ce type d'essais permet ici d'étudier la validité dans l'absolu de l'algorithme numérique. Notamment, on sera amené à comparer les performances réelles de celui-ci avec les performances théoriques requises a priori.

- Fonctionnement sur "incidents". Nous entendons par "incidents" des phénomènes classiques sur ce type de Centrale : - Suppression ou remise en route des corps H.P. - Allumage ou extinction de brûleurs - etc...

Avant d'examiner les différents résultats, nous indiquons quelques caractéristiques générales du régulateur numérique.

- Bien qu'ayant utilisé un seul modèle (en d'autres termes les coefficients du régulateur ne sont pas - à la différence de la régulation analogique -

adaptés à la charge), les performances de la régulation numérique sont peu différentes entre 180 et 250 MW (une identification à basse charge n'ayant pu être effectuée pour des raisons de disponibilité de la Tranche, nous n'étions pas autorisés à descendre en-dessous de 180 MW). On notera, par ailleurs, que la chaudière est telle que vers 160 MW deux des 3 commandes (CQD et CQF) sont en butée, ce qui signifie que le système n'est plus commandable. On peut donc estimer que la régulation numérique est opérante dans toute la plage de fonctionnement de la Tranche.

- Le régulateur numérique satisfaisait à une consigne d'exploitation qui consistait à assurer le passage de la régulation analogique au fonctionnement numérique chaîne par chaîne. Bien que cela ait été envisagé un moment, il n'a pas été nécessaire d'utiliser de technique spéciale, ayant constaté en simulation la parfaite stabilité des chaînes durant ce type de fonctionnement.

- On a constaté l'absence totale de statisme en régulation numérique, ce qui, pour des raisons semble-t-il technologiques, n'est pas le cas en régulation analogique. Ceci garantit un confort d'exploitation qui, cependant, n'apparaîtra pas à l'examen des courbes. En effet, pour éviter simplement le problème des à-coups au passage analogique-numérique, nous prenions pour consignes numériques, à chaque passage, la dernière valeur des grandeurs régulées. On constatera donc des différences, selon le jour, entre les valeurs moyennes des grandeurs réglées. Des aménagements élémentaires supprimeraient cet inconvénient en exploitation industrielle.

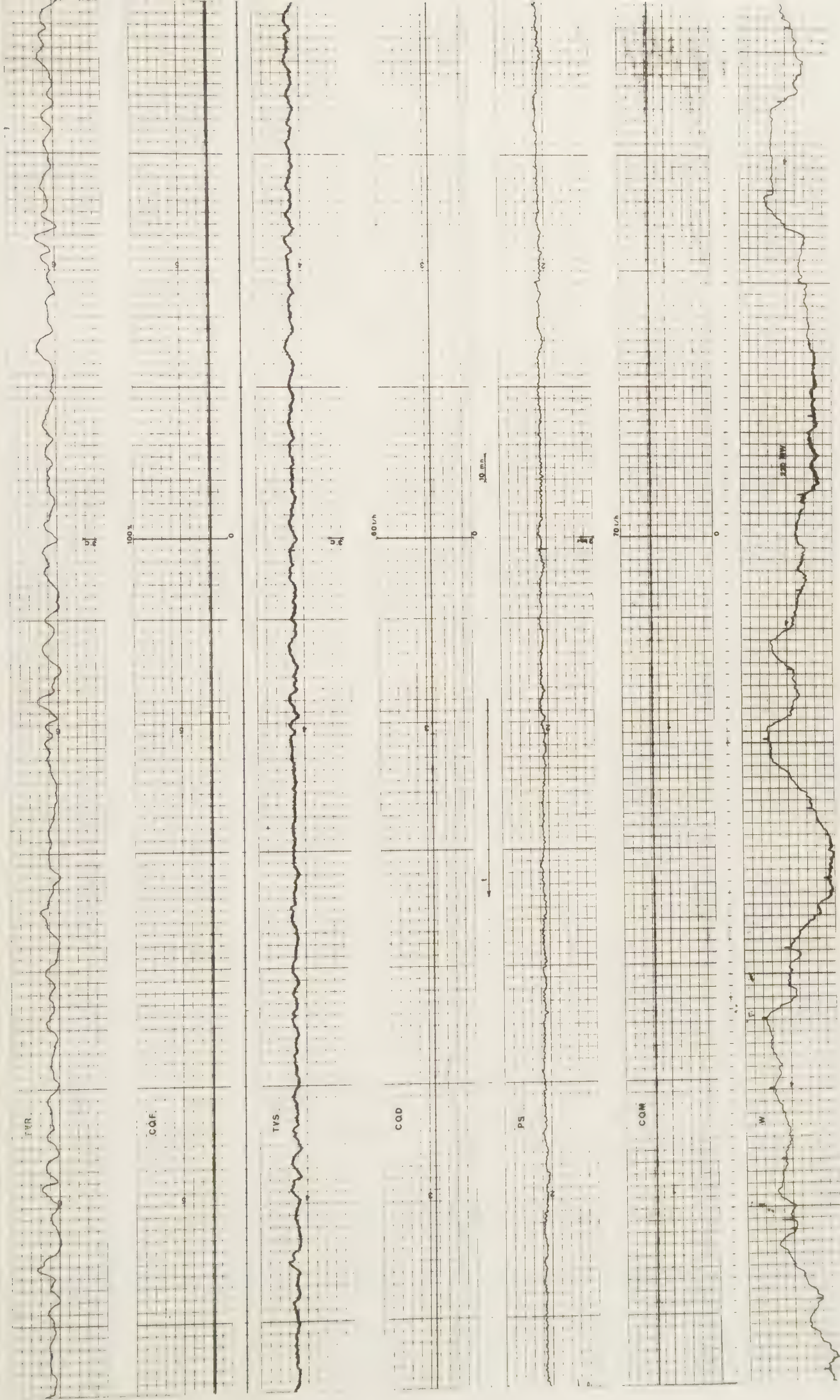
5.1 - Fonctionnement en télé réglage

Les enregistrements continus d'une part (figure 8), les histogrammes couvrant 24 h de fonctionnement d'autre part (figure 9), illustrent les performances comparées des 2 régulations.

On peut dire, en première approche, que pour le télé réglage classique ($\pm 10\%$) les écarts de régulation numérique sur PS, TVS et TVR sont respectivement :

$$\pm 0,5 \text{ bar} \qquad \pm 1,75^\circ\text{C} \qquad \pm 2^\circ\text{C}$$

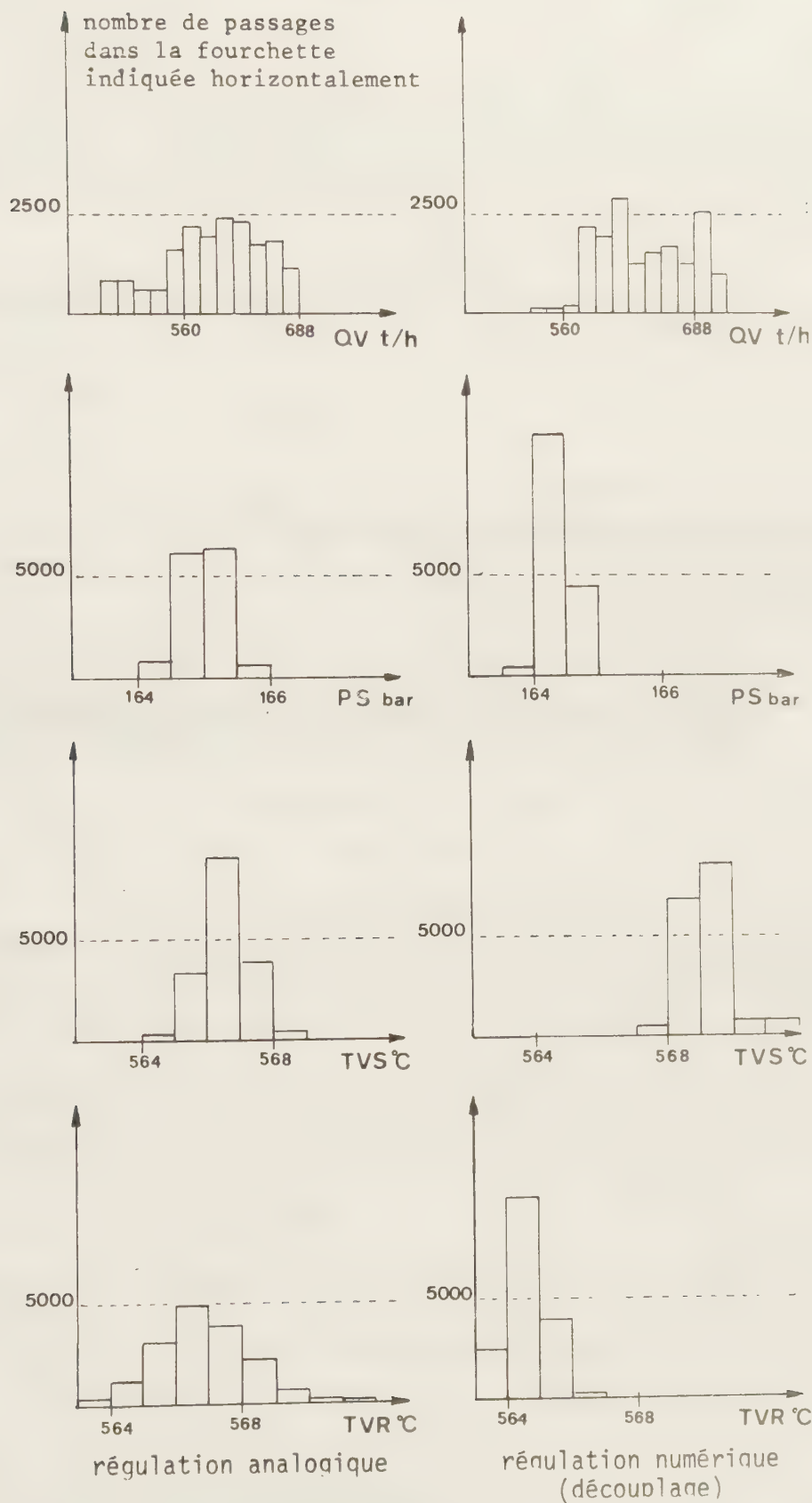
Pour la pression et la température de surchauffe, les performances sont peu différentes de celles de la régulation analogique. En revanche, une nette amélioration est apparue en numérique sur la température de resurchauffe (cf. histogramme) : c'est au prix d'efforts d'amplitude double sur la commande, des ventelles (fig. 10). Rappelons, cependant, que cet organe de commande, prédominant pour cette chaîne, est fortement non linéaire : nous verrons notamment que cette amélioration ne s'est pas confirmée en grands transitoires.



TELEREGLAGE - REGULATION ANALOGIQUE



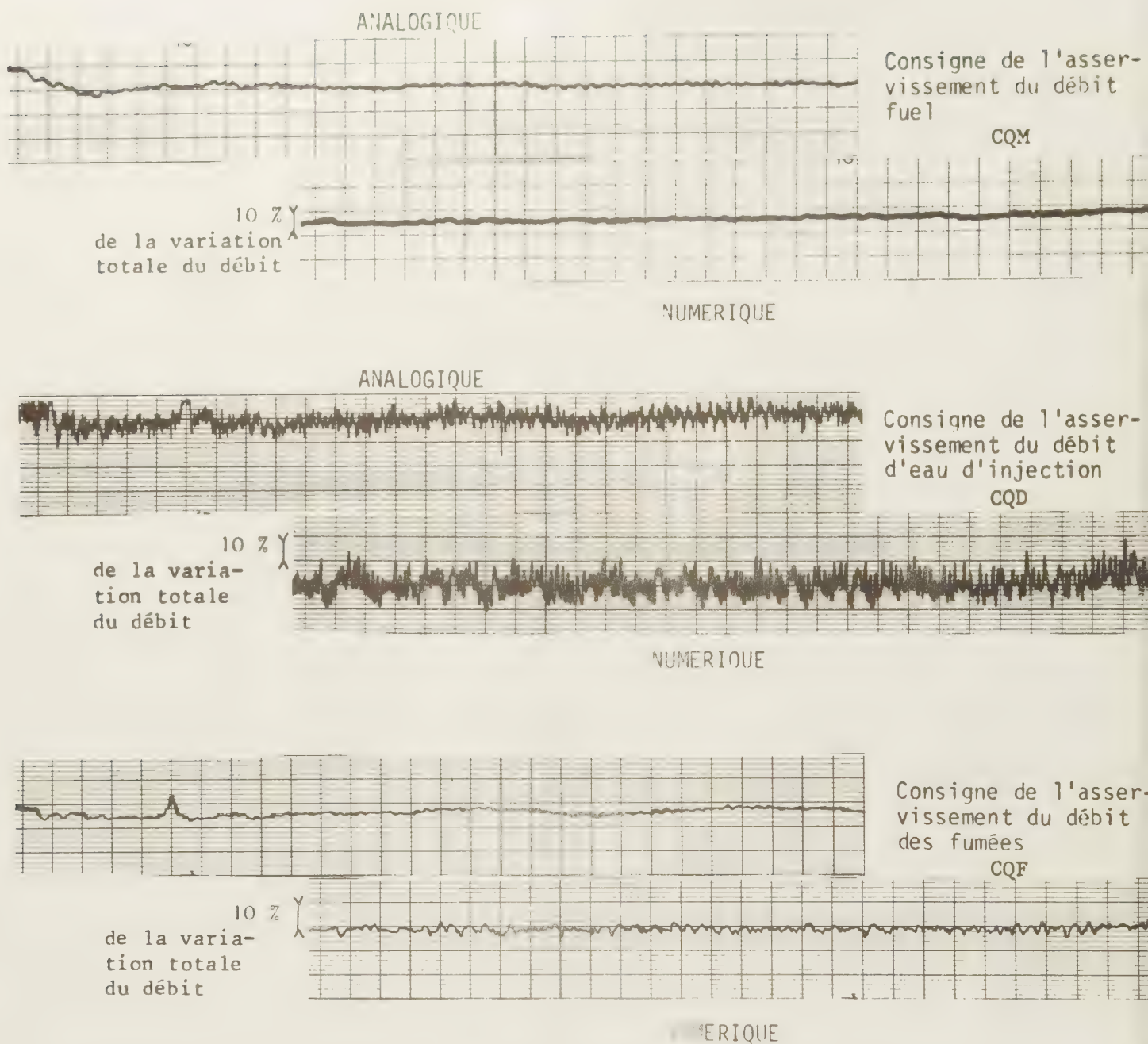
TELEREGLAGE - ALGORITHME DE RÉGULATION NUMÉRIQUE À DÉCOUPLAGE OPTIMAL



HISTOGRAMMES EN TELEREGLAGE

Comparaison des régulations numériques et analogiques sur une période de 24 H

FIG. 9



COMPARAISON DES SIGNAUX DE COMMANDE EN REGULATIONS ANALOGIQUE ET NUMERIQUE

En observant plus en détail l'enregistrement de PS en régulation numérique, on constate une amélioration par rapport à la régulation analogique, sans que ce soit au prix d'efforts supplémentaires sur les organes réglant.

5.2 - Essais en grands transitoires (figure 11)

Ceux-ci ont été effectués avec le poste HP en fonctionnement.

On remarquera, tout d'abord, que la tendance au pompage à basse charge est beaucoup plus nette en régulation analogique.

Examinons, maintenant, des essais en rampe pour constater que le trainage en pression est moins important en numérique. Le trainage en TVS n'est guère appréciable dans aucun des cas. En revanche, la régulation analogique de TVR qui était lente en télé réglage est bonne vis-à-vis des rampes, tandis que sa régulation numérique qui était bonne en télé réglage est devenue lente vis-à-vis des rampes. Ceci est encore probablement à l'actif du comportement non linéaire de cette chaîne.

Pour comparer valablement les réponses à des échelons de charge, il faut avoir à l'esprit les difficultés opératoires qui rendent les échelons imparfaits et d'amplitude guère reproductible (en particulier, les amplitudes des "échelons" sont légèrement plus fortes en numérique qu'en analogique, fig. 11) d'un essai à l'autre. De plus, la valeur finale n'est pas stabilisée car le signal de réglage de la fréquence subsiste sur la charge.

Malgré cela, on peut faire les observations suivantes :

Alors que la pression et la température de surchauffe présentent des allures plus acceptables en régulation numérique qu'en régulation analogique, l'inverse se produit pour la température de resurchauffe pour laquelle les variations du signal de commande, qui permettaient le déblocage des ventelles en télé réglage, sont maintenant trop énergiques. On trouve également sur l'injection d'eau de désurchauffe une action par tendance sur la charge qui aurait intérêt à être amortie.

5.3 - Essais indiciels (figures 12 - 15)

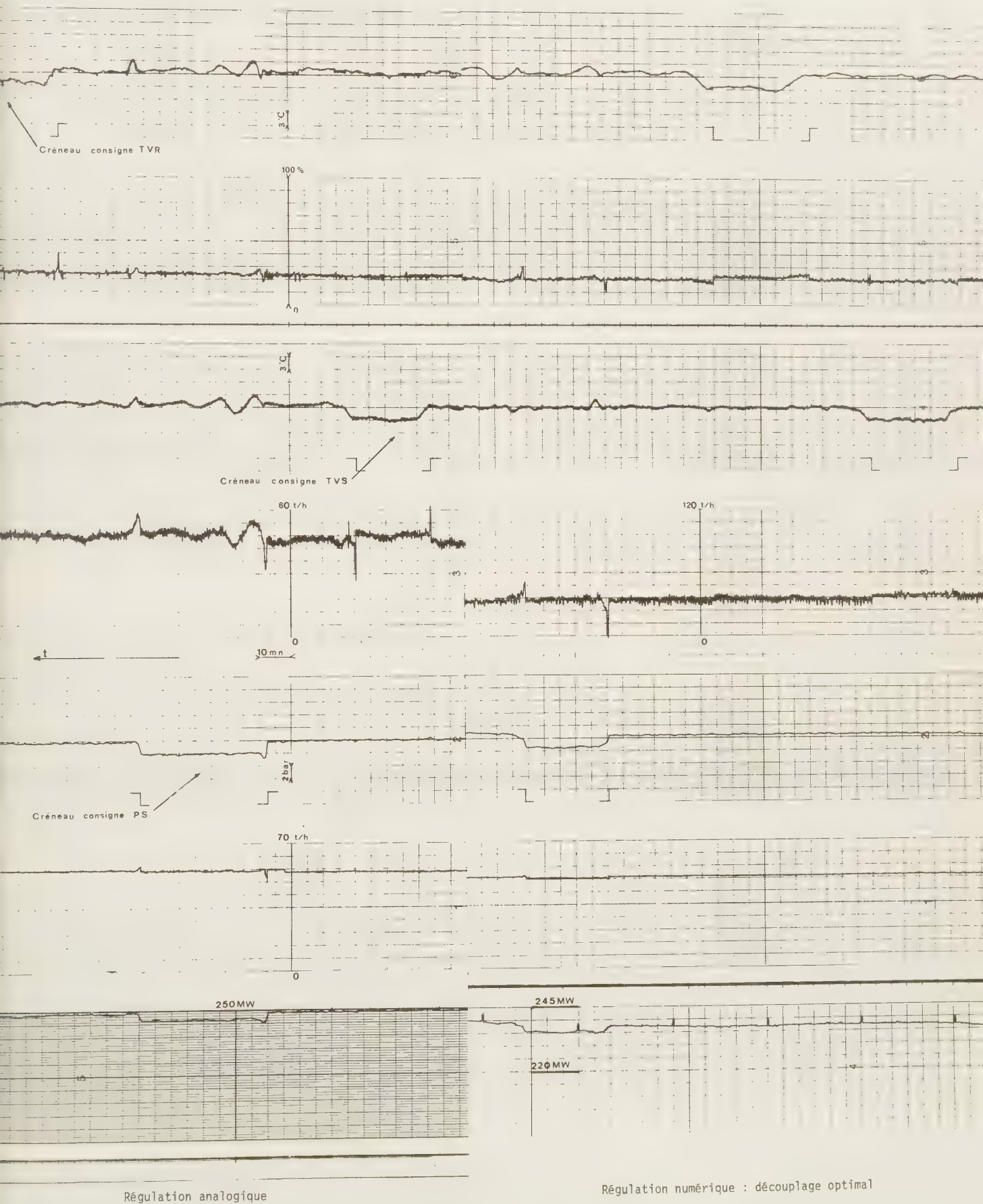
Dans les 2 cas, ces essais ont été réalisés autour de 235 MW, fig. 12. Comme il était impossible de maintenir rigoureusement la charge constante en raison de l'existence, hors télé réglage, du signal de fréquence, nous avons choisi de bloquer l'ouverture soupape, ce qui rend les réponses aux échelons de pression peu significatives puisque simultanément se produit un échelon de charge.



Régulation analogique

Régulation numérique : découplage optimal

ESSAIS EN GRANDS TRANSITOIRES



ESSAIS EN ECHELONS DE CONSIGNES

COMPARAISON DES 2 RÉGULATIONS

FIG. 12

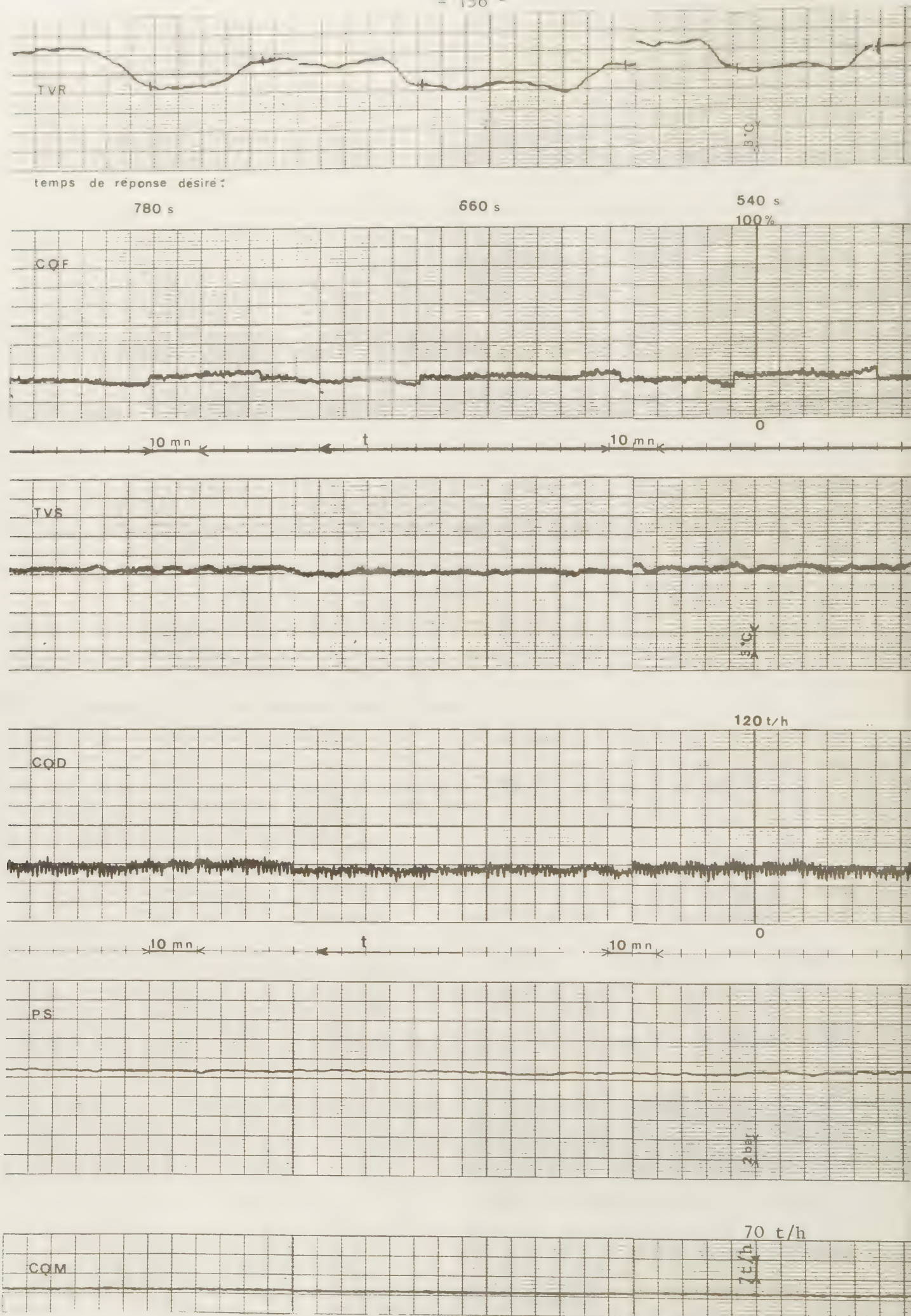


FIG. 13

REPONSES INDICIELLES EN TVR
EN FONCTION DU TEMPS DE REPONSE DESIRE

(algorithme à découplage optimal)

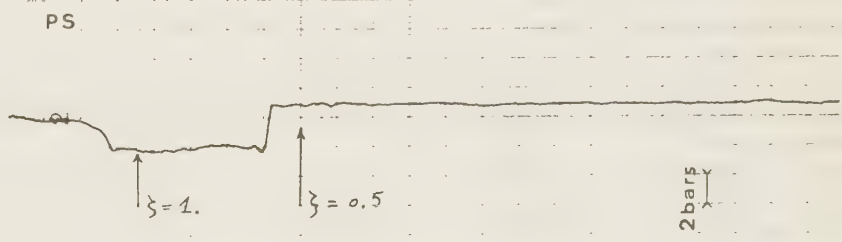
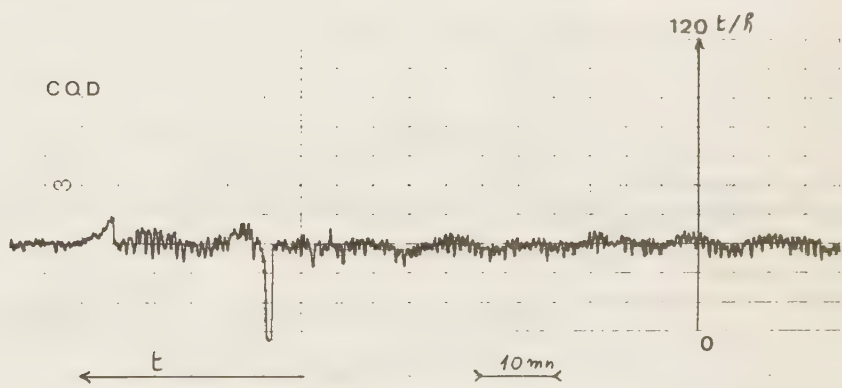
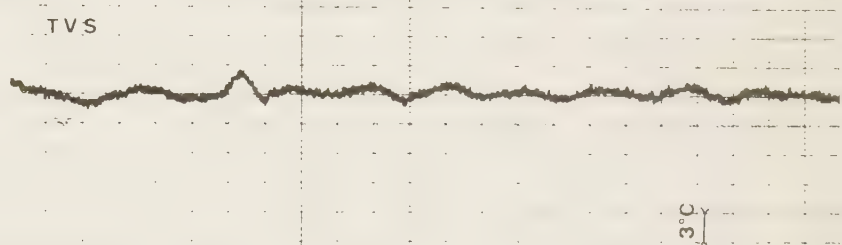
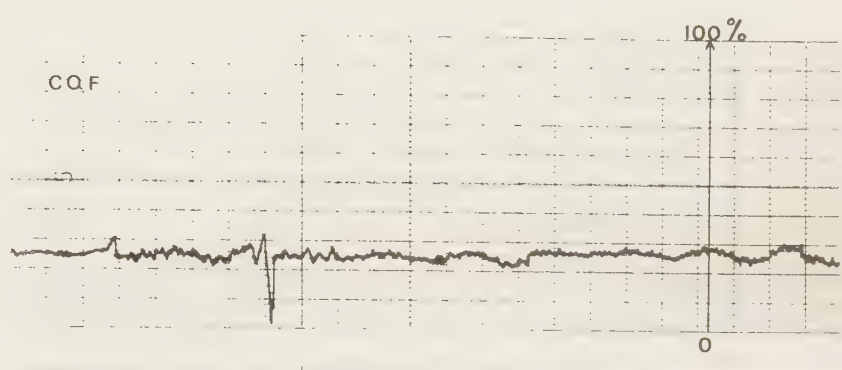
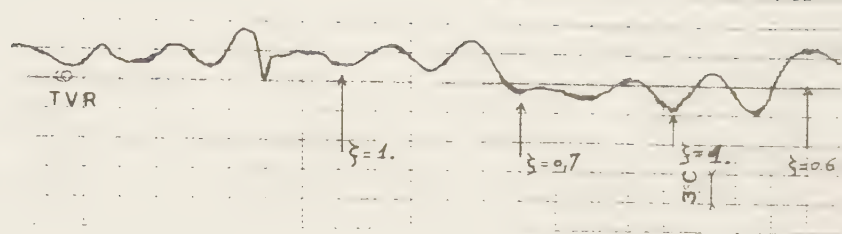
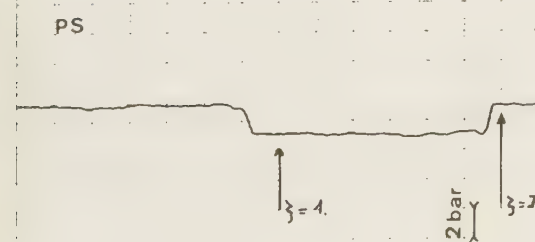
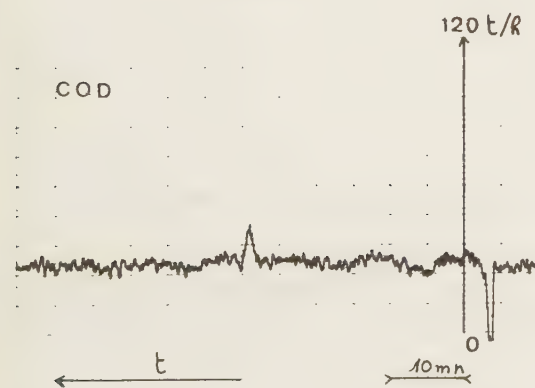
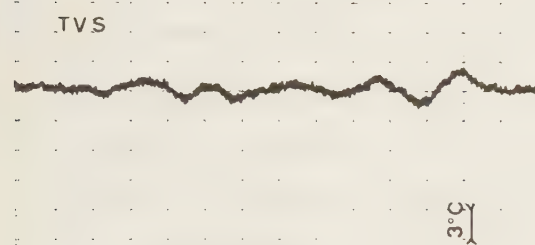
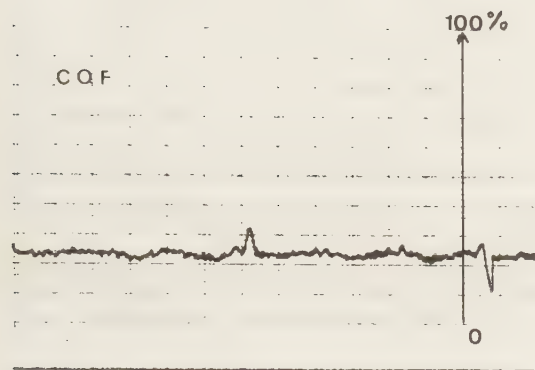
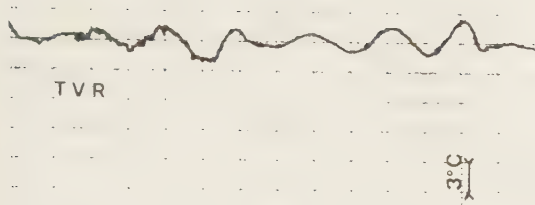


FIG. 14 - 15

INFLUENCE DE LA VARIATION DE ξ

On remarquera des réponses comparables en TVS avec cependant une injection (CQD) très énergique en régulation analogique.

Ce type d'essais en échelon nous a permis d'examiner la validité de la méthode de commande utilisée en comparant les performances attendues avec les performances réelles.

Les figures 13 et 14 sont relatives à l'algorithme numérique et représentent des réponses indicielles obtenues sur site. On constatera d'abord l'efficacité du découplage. Par ailleurs, les performances attendues sont données sous forme de temps de réponse (l'amortissement de chacun des sous-systèmes a été pris unitaire). Les temps de réponse désirés apparaissent bien respectés, peut-être à un degré moindre pour TVR.

D'autres essais ont montré qu'il fallait éviter de se fixer des amortissements trop faibles ($< 0,7$) au risque de voir apparaître des pompages (fig. 15).

Pour la pression, la plage de variation autorisée du temps de réponse étant trop faible pour pouvoir en apprécier, sur les enregistrements, la variation effective, nous avons agi sur le dépassement (fig. 15). On notera que, lorsque l'amortissement de la chaîne n'est plus unitaire, les commandes sont nettement plus énergiques.

5.4 - Fonctionnement sur "incident" (fig. 16)

La figure 16 illustre le passage d'un fonctionnement sans corps H.P. au fonctionnement avec corps H.P., dans lequel on distingue trois étapes :

- Remise en eau des H.P.
- Mise en vapeur des H.P.
- Mise en route de brûleurs

Nous n'avons malheureusement pas de comparaison en régulation analogique, pour ce genre de perturbation importante. Cependant, au dire de l'exploitant, la régulation numérique s'est comportée de façon satisfaisante, l'écart sur la pression ne dépassant pas 2,5 bars, l'écart sur la température de surchauffe 3°C et sur la température de resurchauffe 7°C .

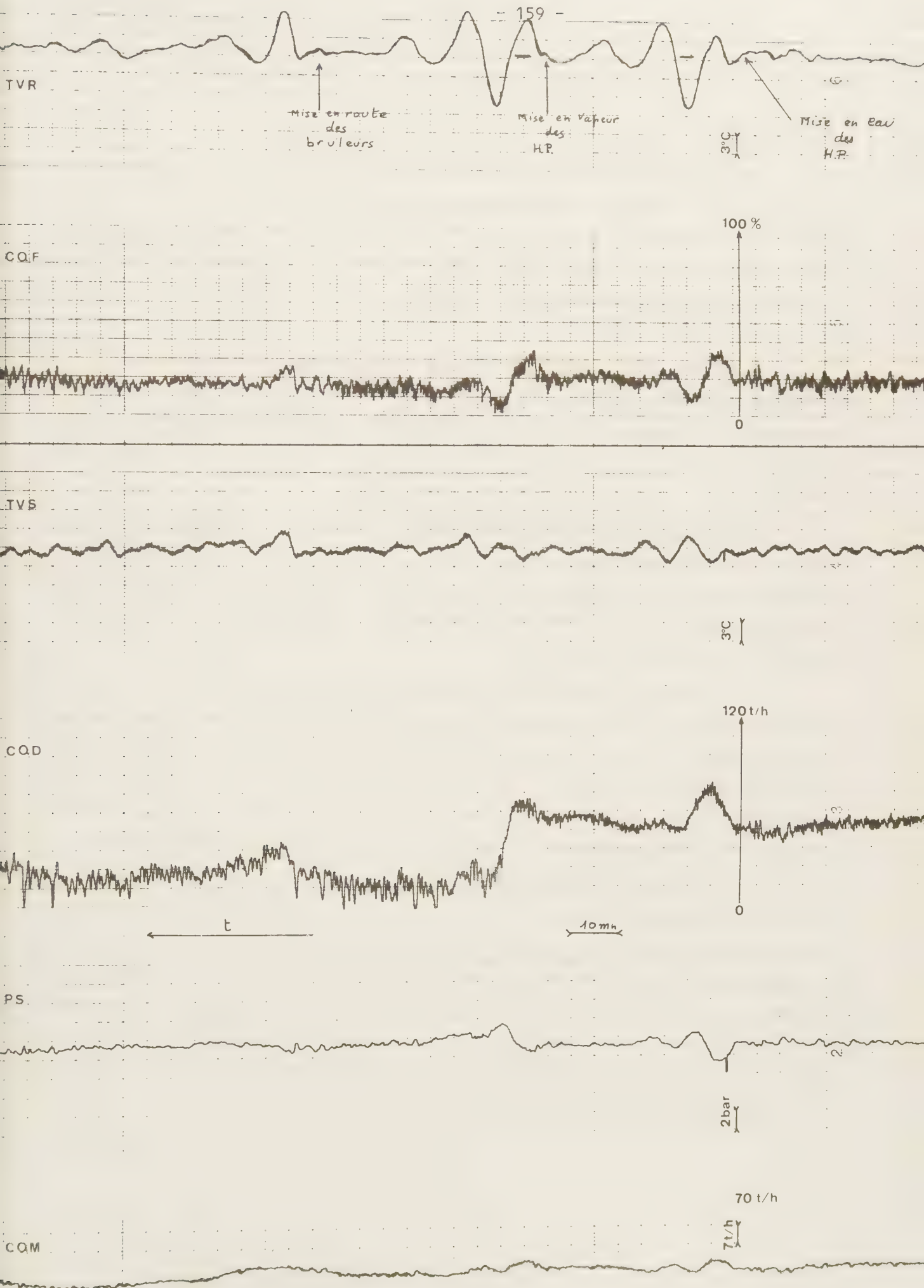


FIG. 16

FONCTIONNEMENT SUR INCIDENTS

6 - CONCLUSION

Comme nous l'avons dit en introduction de ce chapitre, le travail et les résultats qui viennent d'être rapportés s'insèrent dans le cadre d'une expérience plus générale [1] et qui fut l'oeuvre d'une équipe toute entière. Il ne nous appartient donc pas de tirer personnellement des conclusions sur l'expérience globale. Nous rappellerons simplement celles qui ont trait à l'algorithme que nous avons mis au point :

1 - Le fonctionnement en ligne de cet algorithme est d'environ 600 heures avec des conditions d'exploitation variées : télé réglage avec ou sans corps HP - grands transitoires - échelons de charge - échelons de consignes - "incidents" etc... Les tests qui en découlent peuvent donc être considérés comme valables.

2 - En prenant les performances de la régulation analogique en télé réglage pour références, nous sommes parvenus à un algorithme fournissant des performances plutôt meilleures (aucun statisme, écarts types de régulation plus faibles en particulier sur TVR) sans que ce soit, semble-t-il, au prix d'efforts exagérés sur les organes réglants.

3 - Dans les limites des contraintes physiques du processus, l'algorithme permet d'obtenir les performances désirées en termes de temps de réponse et d'amortissement. De plus, il autorise cet ajustement en ligne. Ce dernier point nous semble être d'ailleurs l'un des avantages primordiaux de la méthode utilisée, en comparaison avec d'autres techniques telle que l'optimisation quadratique (avec critère classique ou même simplifié) qui ne permet pas cette latitude.

4 - La partie "*temps réel*" de l'expérience est rapportée en détail dans [3]. Nous en donnerons simplement ici quelques caractéristiques pour le lecteur : l'algorithme de commande proprement dit occupe 1,1 K mots en mémoire centrale et le temps de calcul en ligne des grandeurs de commande est de l'ordre de 0,5 sec. pour des calculs effectués sous interpréteur flottant. L'occupation supplémentaire due à la modification en ligne des paramètres de réglage est de 1,5 K. Rappelons enfin que l'utilisation totale, en régulation, de la mémoire centrale est de 20 K mots (sécurités, traitement des données, ...).

- BIBLIOGRAPHIE -

- [1] Ph. De LARMINAT, "Commande optimale. Identification et régulation
Y. THOMAS, D. SARLAT, en Centrale Thermique EDF"
J. DESCUSSE, J.M. PIASCO Rapport final du contrat DGRST ENSM/CERCI/EDF
n°72 - 7 0 159, Mars 1975.

- [2] Ph. De LARMINAT, "Présentation du processus et identification"
J.M. PIASCO Annexe 1 du précédent contrat DGRST.

- [3] G. THIBAUT "Moniteur et algorithme temps réel"
Annexe 6 du précédent contrat DGRST.

- CONCLUSION -

Dans un article de synthèse publié à propos des principales méthodes de commande multivariabiles développées à l'heure actuelle (Cf. Réf.[1] de l'introduction générale), Mac Farlane attribue à la commande non interactive les défauts suivants :

- Une mauvaise qualité des performances dynamiques du système en boucle fermée puisqu'elles sont généralement sacrifiées au profit du caractère de non interaction.
- Une difficulté de réglage en ligne des paramètres du régulateur.
- L'impossibilité de mettre en oeuvre le système de régulation lorsqu'il existe des modes inobservables instables.

Ces conclusions pessimistes se rapportent principalement aux classiques méthodes opérationnelles qui, il faut l'admettre dans ce cas, sont moins puissantes que les méthodes de l'espace d'état.

L'étude théorique que nous venons de rapporter dans ce mémoire et surtout l'application réelle qui s'en est suivie, nous autorise en effet à réfuter en partie ces conclusions. Nous avons montré au Chapitre 1 et au Chapitre 4 que le problème des instabilités cachées pouvait se résoudre assez facilement en utilisant un compensateur dynamique approprié. D'autre part, l'expérience sur processus qui est décrite au Chapitre 5 montre, par l'examen des enregistrements, que les performances dynamiques obtenues avec le système de régulation à découplage optimal, sont de bonne qualité puisqu'au moins comparables à celles obtenues avec le système de régulation analogique classique existant primitivement sur le processus. N'oublions pas en effet que ce système de régulation a fait l'objet de nombreuses études de la part des services de recherches de l'EDF et qu'il peut en conséquence, être pris valablement comme référence. Rappelons enfin que la mise au point de l'algorithme numérique a été largement facilité grâce à son aspect conversationnel, qui est mis en évidence, en particulier, par les Figures 13, 14 et 15 du Chapitre 5.

Notons également que les calculs nécessités par cette technique ne sont pas prohibitifs. L'algorithme de découplage, utilisé hors ligne pour déterminer les matrices F , G et T , demande en effet un volume et un temps de calcul tout à fait comparables à ceux que nécessiterait, par exemple, l'optimisation quadratique pour le même problème. Quant aux calculs effectués en ligne pour permettre la modification des paramètres de régulation, nous avons

vu au Chapitre 5 qu'ils ne nécessitaient qu'une place réduite en mémoire et qu'ils respectaient très facilement la contrainte "*temps réel*", ce qui ne serait évidemment pas le cas s'il fallait calculer en ligne la solution d'une équation de Riccati.

L'approche du problème de la commande d'un processus complexe, en l'occurrence une tranche de centrale thermique, par les techniques du découplage procure donc à l'utilisateur un certain nombre d'avantages.

Il ne nous est cependant pas permis de conclure dans des termes aussi positifs d'une manière générale. Nous nous devons en effet de signaler un certain nombre d'inconvénients possibles. Citons par exemple :

- L'obligation d'utiliser une compensation dynamique préalable, soit pour découpler le modèle pour les systèmes à "*couplage faible*", soit lorsque des modes invariants instables apparaissent. On est en effet souvent amené dans ce cas à exagérer considérablement la complexité de réseau correcteur, ce qui diminue en définitive le caractère de simplicité recherché. Pour l'exemple rapporté au Chapitre 4, le désir d'éliminer deux modes invariants n'a pu être réalisé qu'au prix de l'adjonction de quatre états supplémentaires.

- L'obtention de sous systèmes découplés comportant un numérateur dynamique. Bien qu'ils ne posent pas de problèmes importants sur le plan théorique pour le calcul de la commande, ce cas n'en limite pas moins l'aspect conversationnel de la méthode, qu'il s'agisse de systèmes discrets ou continu, car les régulateurs "*locaux*" ne peuvent plus se réduire à un simple bouclage sur l'état.

- L'obtention dans le cas discret de sous systèmes découplés comportant un certain nombre de retards purs. Nous avons vu en effet aux Chapitres 3 et 4 que, dans ces conditions, on est obligé de tolérer sur la réponse transitoire un temps mort d'autant plus long que l'ordre du sous système est élevé, à moins que consigne et perturbation soient prévisibles avec un horizon au moins égal à ce temps mort.

Sur le plan de la mise en oeuvre pratique, on peut également être limité :

- Au niveau des commandes, par des actions trop énergiques pour qu'elles puissent être réellement appliquées sur le processus, à moins d'utiliser une compensation dynamique appropriée.

- Par une imprécision trop grande du modèle : bien que le découplage ne soit pas notre objectif principal, il doit cependant être quasi effectif pour que les méthodes de réglage développées aux Chapitres 2 et 3 demeurent efficaces, ce qui ne peut se concevoir avec un modèle trop imparfait.

Cependant, lorsque les sous systèmes découplés ont une structure simple (intégrateurs purs en cascade) nous estimons que le découplage optimal soutient aisément la comparaison avec d'autres méthodes. Nous n'en voulons pour preuve que celle qui a été réalisée, en centrale thermique, avec un algorithme optimal à "*horizon fuyant*" (Cf. Réf. [1] du Chapitre 5). Si les résultats obtenus sur site restent comparables pour les deux méthodes du point de vue des performances obtenues, nous pouvons dire cependant que l'algorithme à découplage optimal s'est révélé d'une mise au point plus aisée et plus rapide grâce à ses possibilités conversationnelles.

ANNEXE 1

PROGRAMME DE CALCUL : LISTING ET EXEMPLE D'APPLICATION

La technique du découplage, bien que séduisante sur le plan théorique, peut toutefois se révéler d'un usage difficile au niveau des applications pratiques à cause des calculs qu'elle nécessite, et qui sont souvent fastidieux sinon inextricables à la main, surtout lorsque la dimension du système est importante. Pour pallier cet inconvénient, nous avons mis au point un programme FORTRAN qui permet de calculer rapidement toutes les données nécessaires à la synthèse d'un système découplé (Cf. § 4 Chapitre 1).

Ce programme ayant fait par ailleurs l'objet d'un rapport détaillé [1], nous ne donnerons ici que le minimum d'indications nécessaires à son utilisation pratique. Le lecteur trouvera notamment en début de listing :

- Les valeurs maximum que l'on peut admettre pour les dimensions de l'état, de l'entrée et de la sortie du système que l'on veut découpler.
- Le format de lecture pour les cartes de données et le format d'écriture pour les résultats.
- La liste des sous programmes du SSP IBM [2], auxquels le programme principal fait appel.

Nous donnerons également, à titre d'illustration, un exemple d'application dont les valeurs numériques sont celles qui ont été utilisées aux Chapitres 4 et 5 de ce mémoire.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] J. DESCUSSE "Un programme FORTRAN pour la synthèse des systèmes découplés".
Rapport effectué dans le cadre du contrat D.G.R.S.T.-
E.N.S.M.-E.D.F. Comité Automatisation n° 72.7.0159.
- [2] I.B.M. Corp. System/360 Scientific Subroutine Package
(360 A - CM - 03 X) Version III Programmer's Manual 642 - 0205 - 4.

IV

MAIN PROGRAM

DATE

5/02/75

TIME

08

PURPOSE

SOLVE THE DECOUPLING PROBLEM FOR LINEAR STATIONNARY
MULTIVARIABLE SYSTEMS DEFINED BY: A(N,N), B(N,M), C(M,N)
WITH N MAX.=15 AND M MAX.=5

INPUT DATA

-THE FIRST DATA CARD IS READ IN WITH FORMAT (2I3,E8.1,I1)
AND CONTAINS:

N: ORDER OF THE SYSTEM

M: NUMBER OF INPUTS AND OUTPUTS

TOL: ZERO TOLERANCE USED AT SEVERAL POINTS IN THE PROGRAM
TO IGNORE ROUND OFF ERROR DUE TO CALCULATION WITH A
FIXED NUMBER OF SIGNIFICANT DIGITS

IMP: NON NEGATIVE INTEGER USED TO PRINT (OR NOT) SECONDARY
RESULTS

IMP=0 NO PRINTING

IMP>0 PRINTING

-NEXT THE DATA FOR THE A, B, AND C MATRICES IS READ IN BY
STATEMENTS 20, 21, 22, RESPECTIVELY, ACCORDING TO
THE FORMAT (6(F11.4, 2X))

SUBROUTINES REQUIRED

THEY CAN BE FOUND IN THE 'IBM SSP' AND ARE:
ARRAY, MCPY, RCPY, GMPRO, MINV, SCLA, GMTRA, RADD, M-GR, DCLA,
XCPY, SPYA, LOC, GMSUB, CADD, DCPY, PROD, CCPY, SCMA

REMARK

IF DOUBLE PRECISION IS NECESSARY INSERT AS FIRST CARD:
IMPLICIT REAL*8(A-H, O-Z)
PUT ALL THE IBM SSP SUBROUTINES IN DOUBLE PRECISION TOO
AND CHANGE THE ABS STATEMENT IN DABS

IMPLICIT REAL*8(A-H, O-Z)

DIMENSION A(15,15), B(15,5), C(5,15), AO(15,5)

DIMENSION D(5,5), CI(15), R(5), ID(5)

DIMENSION ATEMP(15,5), TEMP(15,15)

DIMENSION DINV(5,5), EL(5), EN(15)

DIMENSION ASTAR(5,15)

DIMENSION ABAR(15,15), BHAR(15,5), CBAR(5,15)

DIMENSION ATIL(15,15), BTIL(15,5), CTIL(5,15), IROW(90), ICOL(15)

DIMENSION H(90,15), ELL(15,15), T1(15,15), IP(7)

DIMENSION AC(15,15), BC(15,5), CC(5,15), C(15,15), T2(15,15)

DIMENSION AHAT(15,15), BHAT(15,5), CHAT(5,15)

DIMENSION AI(15,15), BI(15), RI(15,15), QIK(15), FK(15,15)

DIMENSION TEMPL(15,15), EM(15)

DIMENSION V(15,15)

DIMENSION PC(15), PQ(15), PF(15), POL(5)

DIMENSION NU(5), KROW(15), HH(15,30), NCOL(30), S(30,30), E(15,30), EI(1

15,15)

DIMENSION QQ(30,30), STEMP(30,30), FTEMP(15,30), XL(15,15), XK(15,15),

IES(30), FS(30)

DIMENSION HI(15,90)

DIMENSION NCOLH(30)

DIMENSION XLTHID(15,15)

5 FORMAT(2I3,E8.1,I1)

6 FORMAT(1X,2HN=,I2,3X,2HM=,I2,3X,15HZERO TOLERANCE=,E8.1)

READ(1,5) N,M,TOL,IMP

IF (IMP.EQ.0) WRITE(3,1)

1 FORMAT (//,1X,'ONLY MAIN RESULTS ARE PRINTED',//)

NCOMP=0

EPS1=TOL

DO 509 I=1,M

509 NU(I)=0

10 FORMAT(6(F11.4,2X))

15 FORMAT (6(1X,F21.9))

DO 20 I=1,N

20 READ(1,16) (A(I,J), J=1,N)

```

DO 21 I=1,N
21 READ(1,16) (B(I,J),J=1,M)
DO 22 I=1,M
22 READ(1,16) (C(I,J),J=1,N)
25 FORMAT(10X,8HA MATRIX)
1505 WRITE(3,6) N,M,TOL
WRITE(3,25)
DO 26 I=1,N
26 WRITE(3,15) (A(I,J),J=1,N)
27 FORMAT(10X,8HB MATRIX)
WRITE(3,27)
DO 28 I=1,N
28 WRITE(3,15) (B(I,J),J=1,M)
29 FORMAT(10X,8HC MATRIX)
WRITE(3,29)
DO 30 I=1,M
30 WRITE(3,15) (C(I,J),J=1,N)
I=1
CALL ARRAY (2,N,N,15,15,A,A)
CALL ARRAY (2,N,M,15,5,B,B)
CALL ARRAY (2,M,N,5,15,C,C)
35 J=C
CALL MCPY (B,AC,N,M,0)
CALL RCPY (C,I,CI,M,N,0)
38 CALL GMPRD (CI,AO,R,1,N,M)
39 K=C
40 K=K+1
IF (R(K)-TOL) 41,41,43
41 IF (R(K)+TOL) 43,42,42
42 IF (M-K) 48,50,40
43 ID(I)=J
DO 44 K=1,M
44 D(I,K)=R(K)
IF (M-I) 48,60,45
45 I=I+1
GO TO 35
48 WRITE(3,49)
49 FORMAT (1X,13HPROGRAM ERROR)
GO TO 10
50 CALL GMPRD (A,AO,ATEMP,N,N,M)
CALL MCPY (ATEMP,AO,N,M,0)
J=J+1
CALL GMPRD (C,I,AO,R,1,N,M)
IF (N-1-J) 48,43,39
57 WRITE(3,58)
58 FORMAT (1X,2CHD MATRIX IS SINGULAR)
JDTEST=1
GO TO 65
60 CALL ARRAY (2,M,M,5,5,D,D)
C
C IS D MATRIX SINGULAR?
CALL MCPY (D,DINV,M,M,0)
CALL MFGR (DINV,M,M,TOL,IPANK,IROW,ICOL)
IF (IPANK.NE.M) GO TO 62
C
CALL MCPY (D,DINV,M,M,0)
CALL DMINV (DINV,M,DET,EL,R)
JDTEST=0
GO TO 65
62 GO TO 57
65 WRITE(3,67) DET
67 FORMAT (1X,24HDETERMINANT OF D MATRIX=,E10.3)
CALL ARRAY (1,M,M,5,5,D,D)
CALL ARRAY (1,M,M,5,5,DINV,DINV)
68 FORMAT (10X,8HD MATRIX)
WRITE(3,68)
DO 968 I=1,M
968 WRITE(3,15) (D(I,J),J=1,M)
69 FORMAT (10X,16HD INVERSE MATRIX)
WRITE(3,69)
DO 969 I=1,M
969 WRITE(3,15) (DINV(I,J),J=1,M)
971 FORMAT(1X,6HD-SUB-,I2,1H=,I2)
DO 972 K=1,M
972 WRITE(3,971) K, ID(K)
I=1
IF (JDTEST) 48,70,550
70 J=0

```

A 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39 40 41 42 43 44 45 46 47 48 49 50 51 52 53 54 55 56 57 58 59 60 61 62 63 64 65 66 67 68 69 70 71 72 73 74 75 76 77 78 79 80 81 82 83 84 85 86 87 88 89 90 91 92 93 94 95 96 97 98 99 100

MATRPGM

DATE 09/02/76

TIME

```

      CALL MCPY (C,I,M,N,0)
71  CALL GMP (CI,A,EN,1,N,N)
      CALL MCPY (EN,CI,1,N,0)
      J=J+1
      IF (J-ID(1)-1) 71,72,48
72  IF 73 K=1,N
73  ASTAR(I,K)=CI(K)
74  IF (I-M) 75,98,48
75  I=I+1
      GO TO 70
90  FFORMAT (10X,13HA STAR MATRIX)
980 WRITE(3,20)
      DO 981 I=1,M
981  WRITE(3,15) (ASTAR(I,J),J=1,N)
      CALL ARRAY (2,M,N,5,15,ASTAR,ASTAR)
      CALL ARRAY (2,M,M,5,5,DINV,DINV)
      CALL GMP (B,DINV,BBAR,N,M,M)
      CALL GMP (BBAR,ASTAR,TEMP,N,M,N)
      CALL GMSUB (A,TEMP,ABAR,N,N)
      CALL MCPY (C,CBAR,M,N,0)
      CALL GMP (DINV,ASTAR,TEMP,M,M,N)
      CALL ARRAY (1,M,N,15,15,TEMP,TEMP)
      CALL ARRAY (1,N,N,15,15,ABAR,ABAR)
      CALL ARRAY (1,N,M,15,5,BBAR,BBAR)
      CALL ARRAY (1,M,N,5,15,CBAR,CBAR)
81  FFORMAT (10X,12HA BAR MATRIX)
      WRITE (3,81)
      DO 982 I=1,N
982  WRITE(3,15) (ABAR(I,J),J=1,N)
82  FFORMAT (10X,12HB BAR MATRIX)
      WRITE(3,82)
      DO 983 I=1,N
983  WRITE(3,15) (BBAR(I,J),J=1,M)
83  FFORMAT (10X,12HC BAR MATRIX)
      WRITE(3,83)
      DO 984 I=1,M
84  WRITE(3,15) (CBAR(I,J),J=1,N)
85  FFORMAT (10X,23H-D-INVERSE*ASTAR MATRIX)
      WRITE (3,85)
      DO 86 I=1,M
      DO 7 K=1,N
7  TEMP(I,K)=-TEMP(I,K)
86  WRITE(3,15) (TEMP(I,J),J=1,N)
CC
CC  CALCULATE T1 MATRIX
      K=0
      CALL ARRAY (2,N,M,15,5,BBAR,BBAR)
      CALL ARRAY (2,N,N,15,15,ABAR,ABAR)
      CALL MCPY (BBAR,AU,N,M,0)
      CALL SCLA (H,C,N,M,N,0)
100  CALL GMTRA (AC,TEMP,N,M)
      DO 101 J=1,M
101  CALL RADD (TEMP,J,H,K+J,M,N,0,N*M)
      IF (K-((N-1)*M)) 108,109,48
108  K=K+M
      CALL MCPY (AC,ATEMP,N,M,0)
      CALL GMP (ABAR,ATEMP,AC,N,N,M)
      GO TO 100
109  CALL MGR (H,N*M,N,TOL,NC,IROW,ICOL)
      IF (NC-N) 122,120,48
120  IP(M+2)=0
      CALL MCPY (ABAR,ATIL,N,N,0)
      CALL MCPY (BBAR,BTIL,N,M,0)
      CALL ARRAY (2,M,N,5,15,CBAR,CBAR)
      CALL MCPY (CBAR,CTIL,M,N,0)
      CALL SCLA (T1,C,N,N,0)
      CALL DCLA (T1,I,N,N,0)
      CALL MCPY (T1,FLL,N,N,0)
121  FFORMAT (1X,34HSYSTEM IS CONTROLLABLE T1 MATRIX=I)
      WRITE(3,121)
      GO TO 199
122  WRITE(3,123) NC
123  FFORMAT (1X,30HSYSTEM IS NOT CONTROLLABLE NC=,I2)
      CALL SCLA (FLL,D,N,N,0)
      CALL ARRAY (1,N*M,N,90,15,H,H)
      IF (IMP.EQ.0) GO TO 2
      WRITE(3,125)

```

```

125  FORMAT (1X,1RHSOLUTION OF LITERX)
      NM=N*M
      DO 127 L=1,NM
127  WRITE(3,15) (H(L,L1),L1=1,N)
127  FORMAT (1X,5HICOL=,20I3)
      WRITE(3,9127) (ICOL(L),L=1,N)
      IN=N-NC
      DO 129 J=1,IN
      CALL SCLA(FN,C,1,N,0)
      EN(ICOL(NC+J))=1
      DO 128 L=1,NC
128  EN(ICOL(L))=H(L,NC+J)
129  CALL CADD(FN,1,ELL,NC+J,N,1,0,N)
      K=0
      CALL MCPY (BBAR,AD,N,M,0)
      CALL SCLA (H,C,N*M,N,C)
130  CALL GMTRA (AC,TEMP,N,M)
      DO 131 J=1,M
131  CALL RADD (TEMP,J,H,K+1,M,N,0,N*M)
      IF (K-((N-1)*M)) 132,133,48
132  K=K+M
      CALL MCPY (AC,ATEMP,N,M,0)
      CALL GMPRD (ABAR,ATEMP,AC,N,N,M)
      GO TO 130
133  DO 134 J=1,NC
      CALL RCPY (H,IROW(J),EN,N*M,N,C)
134  CALL CADD (FN,1,ELL,J,N,1,0,N)
      CALL ARRAY (1,N,N,15,15,ELL,ELL)
      WRITE (3,138)
138  FORMAT(10X,8HL MATRIX)
      DO 139 I=1,N
139  WRITE(3,15) (ELL(I,J),J=1,N)
      CALL APRAY(2,N,N,15,15,ELL,ELL)

      IS L MATRIX SINGULAR?
      CALL MCPY (ELL,T1,N,N,0)
      CALL MFGR (T1,N,N,TCL,IRANK,IROW,ICOL)
      IF (IRANK.NE.N) GO TO 141

      CALL MCPY (ELL,T1,N,N,0)
      CALL DMINV (T1,N,DETER,CI,EN)
      GO TO 150
141  WRITE(3,142)
142  FORMAT(1X,20HL MATRIX IS SINGULAR)
      GO TO 48
150  CALL GMPRD(ABAR,ELL,TEMP,N,N,N)
      CALL GMPRD(T1,TEMP,ATIL,N,N,N)
      CALL GMPRD(T1,8BAR,BTIL,N,N,M)
      CALL ARRAY (2,M,N,5,15,CBAR,CBAR)
      IP(M+2)=N-NC
      CALL GMPRD(CBAR,ELL,CTIL,M,N,N)
155  CALL ARRAY (1,N,N,15,15,ATIL,ATIL)
      CALL ARRAY (1,N,M,15,5,BTIL,BTIL)
      CALL ARRAY (1,M,N,5,15,CTIL,CTIL)
      CALL APRAY (1,N,N,15,15,T1,T1)
      WRITE(3,156)
156  FORMAT(10X,9HT1 MATRIX)
      DO 157 I=1,N
157  WRITE(3,15) (T1(I,J),J=1,N)
      WRITE(3,158)
158  FORMAT(10X,14HA TILDA MATRIX)
      DO 159 I=1,N
159  WRITE(3,15) (ATIL(I,J),J=1,N)
      WRITE(3,160)
160  FORMAT(10X,14HB TILDA MATRIX)
      DO 161 I=1,N
161  WRITE(3,15) (BTIL(I,J),J=1,M)
      WRITE(3,162)
162  FORMAT(10X,14HC TILDA MATRIX)
      DO 163 I=1,M
163  WRITE(3,15) (CTIL(I,J),J=1,N)
      CALL ARRAY (2,N,N,15,15,ATIL,ATIL)
      CALL ARRAY (2,N,M,15,5,BTIL,BTIL)
      CALL ARRAY (2,M,N,5,15,CTIL,CTIL)
      CALL ARRAY (2,N,N,15,15,T1,T1)

```

CALCULATE Q MATRIX

IV 36CN-FC-479 3-8

MAINPGM

DATE 09/02/76

TIME

08.

```

WRITE(3,251) 1,IP(1)
251 FORMAT(1X,6HP-SUB-,I2,1H=,I2)
CALL RCPY (CC,I,CI,M,NC,C)
II=ID(I)+1
DO 252 L=1,II
CALL RADD (CI,1,Q,IPE+L,1,NC,0,NC)
CALL MCPY (CI,EN,1,NC,C)
252 CALL GMPRO(FN,AC,CI,1,NC,NC)
IPE=IPE+IP(I)
IF(I-M) 250,270,48
270 IF(IPE-NC) 271,275,48
271 CALL MCPY (Q,TEMP,NC,NC,0)
TOL=EPS1
CALL MFGR (TEMP,NC,NC,TOL,JRANK,IROW,ICOL)
IF(JRANK-IPE) 48,272,48
272 CALL ARRAY(1,NC,NC,15,15,TEMP,TEMP)
IF (IMP.EQ.0) GO TO 4
WRITE(3,9272)
9272 FORMAT(1X,15H-SOLUTION OF Q*X)
DO 9273 L=1,NC
9273 WRITE(3,15)(TEMP(L,L1),L1=1,NC)
WRITE(3,9127)(ICOL(L),L=1,N)
4 NNN=NC-IPE
DO 274 J=1,NNN
CALL SCLA(EN,C,1,NC,0)
EN(ICOL(IPE+J))=1
DO 273 L=1,IPE
273 EN(ICOL(L))=TEMP(L,IPE+J)
274 CALL RADD (EN,1,Q,IPE+J,1,NC,0,NC)
275 IP(M+1)=NC-IPE
MMM=M+1
WRITE(3,9274) MMM,IP(M+1)
9274 FORMAT(1X,6HP-SUB-,I2,1H=,I2)
IF (NC-N) 276,280,48
276 CALL SCLA (TEMP,0,N,N,0)
NCC1=NC+1
CALL ARRAY (1,N,N,15,15,TEMP,TEMP)
DO 9276 J=NCC1,N
9276 TEMP(J,J)=1.0
CALL ARRAY(2,N,N,15,15,TEMP,TEMP)
DO 277 J=1,NC
CALL SCLA (EN,0,1,N,0)
CALL RCPY (Q,J,EN,NC,NC,0)
277 CALL RADD (EN,1,TEMP,J,1,N,0,N)
GO TO 281
280 CALL MCPY (Q,TEMP,N,N,0)
281 CALL MCPY (TEMP,T2,N,N,0)

C
C IS T2 MATRIX SINGULAR
TOL=EPS1
CALL MFGR (T2,N,N,TOL,IRANK,IROW,ICOL)
IF (IRANK.NE.N) GO TO 285

C
CALL MCPY (TEMP,T2,N,N,0)
CALL DMINV (TEMP,N,DETER,CI,EN)
CALL ARRAY (1,N,N,15,15,T2,T2)
WRITE(3,282)
282 FORMAT(10X,9HT2 MATRIX)
DO 283 I=1,N
283 WRITE(3,15)(T2(I,J),J=1,N)
GO TO 287
285 WRITE(3,286)
286 FORMAT (1X,21HT2 MATRIX IS SINGULAR)
GO TO 48
287 CALL ARRAY (2,N,N,15,15,T2,T2)
CALL GMPRO (CTIL,TEMP,CHAT,M,N,N)
CALL GMPRO (T2,BTIL,BHAT,N,N,M)
CALL GMPRO (T2,ATIL,AHAT,N,N,N)
CALL MCPY (AHAT,ELL,N,N,0)
CALL GMPRO (ELL,TEMP,AHAT,N,N,N)
CALL ARRAY (1,N,N,15,15,TEMP,TEMP)
CALL ARRAY (1,N,N,15,15,AHAT,AHAT)
CALL ARRAY (1,N,M,15,5,BHAT,BHAT)
CALL ARRAY (1,M,N,5,15,CHAT,CHAT)
WRITE(3,288)
288 FORMAT(10X,17HT2 INVERSE MATRIX)
DO 289 I=1,N
289 WRITE(3,15)(TEMP(I,J),J=1,N)

```

MAINPGM

DATE 09/02/76

TIME

```

      WRITE(3,230)
      CALL MAT(1,X,12,HA-HAT MATRIX)
      DO 241 I=1,N
      WRITE(3,13)(AHAT(I,J),J=1,N)
      WRITE(3,232)
      CALL MAT(1,X,12,HB-HAT MATRIX)
      DO 243 I=1,N
      WRITE(3,14)(BHAT(I,J),J=1,M)
      WRITE(3,234)
      CALL MAT(1,X,12,HC-HAT MATRIX)
      DO 245 I=1,M
      WRITE(3,15)(CHAT(I,J),J=1,N)
C
C CALCULATE THE PI I K CONSTANTS AND V MATRICES
C
      CALL ARRAY (2,N,N,15,15,AHAT,AHAT)
      CALL ARRAY (2,N,M,15,5,BHAT,BHAT)
500  IPE=0
      I=1
501  CALL XCOPY (AHAT,AI,IPE+1,IPE+1,IP(I),IP(I),N,N,C)
      CALL XCOPY (BHAT,BI,IPE+1,I,IP(I),1,N,M,C)
      CALL SCLA(RI,C,IP(I),IP(I),C)
      CALL DCLA (RI,1,C,IP(I),C)
      CALL DCPY (AI,FN,IP(I),C)
      SUM=0
      IPI=IP(I)
      DO 502 K=1,IPI
502  SUM=SUM+EN(K)
      QIK(I)=SUM
      J=C
      CALL SCLA (FK,C,N,N,C)
503  CALL GMPRD (RI,BI,EN,IP(I),IP(I),1)
      CALL (ADD (EN,1,FK,IP(I)-J,IP(I),1,C,IP(I))
      J=J+1
      CALL SCLA (TEMP1,C,N,N,C)
      CALL DCLA (TEMP1,QIK(J),IP(I),C)
      CALL GMPRD(RI,AI,C,IP(I),IP(I),IP(I))
      CALL GMSUB(C,TEMP1,RI,IP(I),IP(I))
      IF(J-IP(I)) 504,510,48
504  CALL GMPRD(RI,AI,C,IP(I),IP(I),IP(I))
      CALL DCPY(C,FN,IP(I),C)
      SUM=0
      DO 505 K=1,IPI
505  SUM=SUM+EN(K)
      QIK(J+1)=SUM/(J+1)
      GO TO 503
510  CALL ARRAY (1,IP(I),IP(I),15,15,RI,RI)
      DO 9513 K=1,IPI
      DO 9513 L=1,IPI
512  SUM=RI(K,L)
      IF(SUM-TOL) 513,513,514
513  IF(SUM+TOL) 514,9513,9513
9513  CONTINUE
514  GO TO 520
514  WRITE(3,515) I
515  FORMAT(1X,25HTRACE METHOD FAILS FOR I=,I2)
520  WRITE(3,521) 1,IP(I)
521  FORMAT(1X,25H=,I2,3X,8HP-SUB-I=,I2)
      DO 523 K=1,IPI
523  WRITE(3,524) I,K,QIK(K)
524  FORMAT(1X,1HC,I2,I2,1H=,E10.3)
      GO TO 600
9525  CONTINUE
      CALL MOPY (FK,V,IP(I),IP(I),C)
      CALL MOPY (V,TEMP,IP(I),IP(I),C)
      CALL ARRAY (1,IP(I),IP(I),15,15,FK,FK)
      WRITE(3,9524)
9524  FORMAT(1CX,15HTHE K MATRIX IS)
      DO 525 K=1,IPI
525  WRITE(3,15)(FK(K,L),L=1,IPI)
C
C ARE V MATRICES SINGULAR FOR I=1 TO M
C
      CALL MEGP (TEMP,IP(I),IP(I),TOL,IRANK,IROW,ICOL)
      IF (IRANK.NE.IP(I)) GO TO 527
C
      CALL DMINV (V,IP(I),DET,FN,FM)
      GO TO 530
527  WRITE(3,528)

```

```

528 FORMAT(1X,20HK MATRIX IS SINGULAR)
GO TO 48
530 K=C
5300 FORMAT(10X,15HTHE V MATRIX IS)
WRITE(3,9530)
CALL APRAY(1,IP(1),IP(1),15,15,V,V)
DO 9532 L=1,IP1
532 WRITE(3,15)(V(L,L1),L1=1,IP1)
540 IF(I-M) 541,550,48
541 IPE=IPE+IP(1)
I=I+1
GO TO 501
550 IPE=IPE+IP(1)
IF(IPE-NC) 560,1000,48
560 I=I+1
GO TO 501
600 IPI=IP(1)
IF(I-M) 627,627,626
626 IRI=IPI
GO TO 620
627 IRI=IP(1)-ID(1)-1
620 IF(IRI) 48,623,621
621 IF(DABS(QIK(IRI))-TOL) 622,622,625
622 IRI=IRI-1
GO TO 620
623 IF(I-M) 9525,9525,1000
625 PC(IRI+1)=1.C
DO 601 IA=1,IRI
601 PC(IA)=-QIK(IRI+1-IA)
CALL DPRQD(PC,IRI+1,PG,PF,PCL,IR,IER)
603 FORMAT(1X,21H-SUBROUTINE PRQD FAILS)
604 WRITE(3,605) I
605 FORMAT(1X,40HNCN-ZERO EIGENVALUES OF MATRIX AHAT-SUB-,I2)
IF(IER) 606,606,610
606 WRITE(3,9606)
9606 FORMAT(1X,9HREAL PART,3X,14HIMAGINARY PART)
DO 607 IA=1,IR
607 WRITE(3,608) PQ(IA),PE(IA)
608 FORMAT(1X,E10.3,3X,E10.3)
IF(I-M) 9525,9525,1000
610 WRITE(3,603)
IF(I-M) 9525,9525,1000
1000 IF(IP(M+1).EQ.0) GO TO 10

DETERMINATION OF THE DYNAMIC COMPENSATOR

CONSTRUCTION OF THE RI'S

TOL=EPS1

NUT=C
LL=0
IF(IP(M+2).EQ.0) GO TO 400
CALL XCPY(ATIL,AC,1,1,NC,NC,N,N,0)
CALL XCPY(BTIL,BC,1,1,NC,M,N,M,0)
CALL XCPY(CTIL,CC,1,1,M,NC,M,N,0)
CALL MCPY(AC,ATIL,NC,NC,0)
CALL MCPY(BC,BTIL,NC,M,0)
CALL MCPY(CC,CTIL,M,NC,0)
N=NC
400 CALL SCLA(H1,C,N,N*M,0)
DO 1400 J=1,M
CALL SCLA(TEMP,C,N,N,0)
CALL CCPY(BTIL,J,EN,N,M,0)
K=C
401 CALL CADD(EN,1,TEMP,K+1,N,1,0,N)
IF(K-(N-1)) 402,403,48
402 K=K+1
CALL GMPRD(ATIL,EN,CI,N,N,1)
CALL MCPY(CI,EN,N,1,0)
GO TO 401
403 CALL MCPY(TEMP,ELL,N,N,0)
CALL MFGR(ELL,N,N,T(1,NU(J)),KROW,ICOL)
INU=NU(J)
DO 404 L=1,INU
404 CALL CADD(TEMP,L,H1,L+LL,N,N,0,N*M)
LL=LL+NU(J)
1400 CONTINUE
NUT=LL

```

N 17 447-11-47 2-4

MAINPGM

DATE 09/02/76

TIME

```

      NCOMP=NUT-2
      WRITE(3,4400)
44 0  FORMAT(5X,'DIMENSION OF THE CONTROLLABILITY SUBSPACES R1',/)
      DO 1406 K=1,M
1405  WRITE(3,4401)K,NU(K)
44 1  FORMAT(10X,'NU('',12.'')='',12)
      WRITE(3,4402)NCOMP
44 2  FORMAT(5X,'NUMBER OF ADDITIONAL DYNAMICS',12)
C
C      REORGANISATION OF THE R1'S
C
      IDT=0
      LL=1
      LH=0
      CALL SCLA(HF,C,N,NUT,C)
      DO 1406 I=1,M
      LLL=LL+ID(I)
      IDT=IDT+ID(I)
      DO 407 K=LL,LLL
      LH=LH+1
      NCCL(LL)=K
407  CALL CADD(H1,K,HH,LH,N,N*M,C,NUT)
      LL=LL+NU(I)
1406  CONTINUE
      LLL=0
      LH=IDT+M
      DO 408 I=1,M
      LL=LLL+ID(I)+2
      LLL=LLL+NU(I)
      DO 409 K=LL,LLL
      LH=LH+1
      NCCL(LL)=K
409  CALL CADD(H1,K,HH,LH,N,N*M,C,NUT)
408  CONTINUE
      CALL MOPY(HH,FTEMP,N,NUT,C)
      CALL MEGR(FTEMP,N,NUT,TOL,IRANK,KROW,NCOLH)
      IF (IRANK.NE.N) WRITE(3,123)IRANK
C
C      CONSTRUCTION OF THE MATRIX S
C
      CALL SCLA(S,C,NUT,NUT,C)
      CALL SCLA(E,C,NCOMP,NUT,C)
      CALL SCLA(EI,C,NCOMP,NCOMP,C)
      CALL DCLA(EI,1,NCOMP,C)
      DO 410 I=1,NCOMP
410  CALL CADD(EI,I,E,NCOLH(N+I),NCOMP,NCOMP,C,NUT)
      DO 411 I=1,N
411  CALL RADD(HH,I,S,I,N,NUT,C,NUT)
      DO 412 I=1,NCOMP
412  CALL RADD(F,I,S,I+N,NCOMP,NUT,C,NUT)
C
      IND=1
425  CALL ARRAY(1,NUT,NUT,30,30,S,S)
      GO TO (422,423),IND
422  WRITE(3,4408)
4408  FORMAT(10X,'FIRST MATRIX S',/)
      GO TO 424
423  WRITE(3,4409)
4409  FORMAT(10X,'SECOND MATRIX S',/)
424  DO 421 I=1,NUT
421  WRITE(3,15) (S(I,J),J=1,NUT)
      CALL ARRAY(2,NUT,NUT,30,30,S,S)
      IF (IND.EQ.2) GO TO 426
      CALL SCLA(STEMP,C,NUT,NUT,C)
      DO 413 I=1,NUT
413  CALL CADD(S,I,STEMP,NCOL(I),NUT,NUT,C,NUT)
      CALL MOPY(STEMP,S,NUT,NUT,C)
      IND=2
      GO TO 425
C
426  CALL XCOPY(S,E,N+1,1,NCOMP,NUT,NUT,NUT,C)
C
C      CONSTRUCTION OF THE MATRIX G
C
      CALL SCLA(GG,C,NUT,NUT,C)
      CALL ARRAY(1,NUT,NUT,30,30,GG,GG)
      L=0
      INDEX=1

```

IV 36CN-FC-479 3-8

MAINPGM

DATE 09/02/76

TIME

08.

```

481 DO 417 J=1,M
    L2=1
    CALL SCLA (HH,C.,N,NUT,C)
    CALL SCLA (ETEMP,O.,N,NLT,O)
    INU=NU(J)
    DO 414 LL=1,INU
        K=LL+L
414 CALL CADD(H1,K,HH,LL,N,N*M,O,NUT)
        L1=N-NU(J)
        DO 415 K=1,L1
427 IK=L2
        IF (IK.GE.INDEX) IK=L2+NU(J)
        IF (IK.GT.NUT) GO TO 480
        CALL CADD (H1,IK,HH,NU(J)+K,N,N*M,C,NUT)
        CALL MCPY (HH,ETEMP,N,NUT,O)
        CALL MGR (ETEMP,N,NUT,TCL,IRANK,KROW,NCOL)
        IF (IRANK-(NU(J)+K)) 428,429,48
428 L2=L2+1
        CALL SCMA (HH,O.,N,NU(J)+K,O)
        GO TO 427
480 TOL=TCL/10.
        GO TO 481
429 L2=L2+1
415 CONTINUE
    CALL XCPY (HH,TEMP,1,1,N,N,N,NUT,O)
    CALL GMPRD(ATIL,TEMP,ELL,N,N,N)
    CALL DMINV(TEMP,N,DETER,EN,CI)
    CALL GMPRD(TEMP,ELL,Q,N,N,N)
    CALL ARRAY(1,N,N,15,15,Q,Q)
    INU=NU(J)
    DO 416 I=1,INU
        DO 416 K=1,INU
416 QQ(I+L,K+L)=Q(I,K)
        L=L+NU(J)
        INDEX=INDEX+NU(J)
        TOL=EPS1
417 CONTINUE
    WRITE(3,4403)
4403 FORMAT(10X,'MATRICE Q',/)
    DO 418 I=1,NUT
418 WRITE(3,15)(QQ(I,J),J=1,NUT)
        CALL ARRAY(2,NUT,NUT,30,30,QQ,QQ)
        CALL DMINV(S,NUT,DET,ES,FS)
        CALL GMPRD(QG,S,STEMP,NUT,NUT,NUT)
        CALL GMPRD (E,STEMP,ETEMP,NCOMP,NUT,NUT)
        CALL XCPY(ETEMP,XL,1,1,NCOMP,N,NCOMP,NUT,O)
        CALL XCPY(ETEMP,XK,1,N+1,NCOMP,NCOMP,NUT,O)
        CALL ARRAY (1,NCOMP,N,15,15,XL,XL)
        CALL ARRAY(1,NCOMP,NCOMP,15,15,XK,XK)
        WRITE(3,4405)
4405 FORMAT(1CX,'DYNAMIC COMPENSATOR FOR THE TILDA SYSTEM',/)
        WRITE(3,4406)
4406 FORMAT(1CX,'MATRIX L',/)
        DO 420 I=1,NCOMP
420 WRITE(3,15)(XL(I,J),J=1,N)
        WRITE(3,4407)
4407 FORMAT (10X,'MATRICE K',/)
        DO 419 I=1,NCOMP
419 WRITE(3,15)(XK(I,J),J=1,NCOMP)
        IF (IP(M+2).EQ.O) GO TO 1506
        CALL ARRAY (2,NCOMP,N,15,15,XL,XL)
        CALL MCPY (XL,XLTILD,NCOMP,N.O)
        N=NC+IP(M+2)
        NUT=NUT+IP(M+2)
        CALL SCLA (XL,C.,NCOMP,N,O)
        DO 1507 I=1,NC
1507 CALL CADD (XLTILD,I,XL,I,NCOMP,NC.O,N)
        CALL GMPRD (XL,T1,E,NCOMP,N,N)
        CALL MCPY (E,XL,NCOMP,N,O)
        CALL SCLA (ETEMP,O.,NCOMP,NUT,O)
        WRITE (3,4410)
4410 FORMAT(1CX,'DYNAMIC COMPENSATOR',/,15X,'.',/,15X,'Z=LX+KZ',/)
        CALL ARRAY (1,NCOMP,N,15,15,XL,XL)
        WRITE (3,4406)
        DO 1001 I=1,NCOMP
1001 WRITE(3,15) (XL(I,J),J=1,N)
        WRITE (3,4407)
        DO 1002 I=1,NCOMP

```

12 11 11-473 2-2

MAIN.P.M

DATE 09/02/76

TIME

0

```

1502 WRITE (2,15) (XK(I,J),J=1,NCOMP)
      CALL ARRAY (2,NCOMP,N,15,15,XL,XL)
      CALL ARRAY (2,NCOMP,NCOMP,15,15,XK,XK)
      DO 1508 I=1,N
1508  CALL CAPC (XL,I,ETEMP,I,NCOMP,N,C,NUT)
      DO 1509 I=1,NCOMP
1509  CALL CAPC (XK,I,ETEMP,I+N,NCOMP,NCOMP,C,NUT)
(
      CONSTRUCTION OF THE NEW MATRICES A,B,C
(
1504  CALL SCLA (F,C..N,NUT,C)
      DO 1500 I=1,N
1500  CALL CAPC (A,I,F,I,N,N,C,NUT)
      CALL SCLA (A,C..NUT,NUT,C)
      DO 1501 I=1,N
1501  CALL RADD (F,I,A,I,N,NUT,C,NUT)
      DO 1502 I=1,NCOMP
1502  CALL RADD (ETEMP,I,A,I+N,NCOMP,NUT,C,NUT)
      CALL ARRAY (1,NUT,NUT,15,15,A,A)
      CALL SCLA (BBAR,C..NUT,M,C)
      DO 1503 I=1,N
1503  CALL RADD (B,I,BBAR,I,N,M,C,NUT)
      CALL SCLA (B,C..NUT,M,C)
      CALL MOPY (BPAR,B,NUT,M,C)
      CALL ARRAY (1,NUT,M,15,5,B,B)
      CALL SCLA (CPAR,C..M,NUT,C)
      DO 1504 I=1,N
1504  CALL CAPC (C,I,CBAR,I,M,N,C,NUT)
      CALL SCLA (C,C..M,NUT,C)
      CALL MOPY (CBAR,C,M,NUT,C)
      CALL ARRAY (1,M,NUT,5,15,C,C)
      N=NUT
      GO TO 1505
10  STOP
      END

```


C-HAT MATRIX

1.0
0.0
0.0
0.0
0.0

0.0
1.0
0.0

0.0
0.0
0.0

0.0
0.0
0.0

= 1 P-SUB-I= 0
1 1=-0.5170-17
1 2=-0.6170-20

THE K MATRIX IS

1.0
1.0
1.0

THE V MATRIX IS

1.0
1.0

- 2 P-SUB-I= 2
2 1=-0.5680-17
2 2=-0.1240-12

THE K MATRIX IS

1.0
1.0
1.0

THE V MATRIX IS

1.0
1.0

- 3 P-SUB-I= 2
3 1=-0.7530-18
3 2=-0.1270-20

THE K MATRIX IS

1.0
1.0
1.0

THE V MATRIX IS

1.0
1.0

4 P-SUB-I= 2
4 1=-0.5850-01
4 2=-0.2970-03

THE EIGENVALUES OF MATRIX AHAT-SUB- 4

REAL PART IMAGINARY PART

0.5200-01 0.0
0.5610-02 0.0

DIMENSION OF THE CONTROLLABILITY SUBSPACES RI

NU(1)= 4
NU(2)= 4
NU(3)= 4

NUMBER OF ADDITIONAL DYNAMICS 4




```

I= 1      D=0.13-I= 4
O 1 1--0.5050-0.1
O 1 2=-0.0070-0.3
O 1 3=-0.6080-1.2
O 1 4=-0.1210-1.3
NON-ZERO EIGENVALUES OF MATRIX A MAT-SUB-1
REAL PART      IMAGINARY PART
-----
-0.5050-0.1
-0.5610-0.3
THE K MATRIX IS
O 000296615
-0.000000000
1.000000000
1.000003002
THE V MATRIX IS
O 000000000
-41.050765636
3.653707123
-0.180677200
D-CUR-I= 4
O 2 1=-0.5850-0.1
O 2 2=-0.2070-0.3
O 2 3=-0.6080-1.2
O 2 4=-0.1210-1.3
NON-ZERO EIGENVALUES OF MATRIX A MAT-SUB-2
REAL PART      IMAGINARY PART
-----
-0.5290-0.1
-0.5610-0.3
THE K MATRIX IS
O 000296615
-0.000000000
1.000000000
1.000003002
THE V MATRIX IS
O 000000000
-41.050765636
3.653707123
-0.180677200
D-CUR-I= 4
O 3 1=-0.5850-0.1
O 3 2=-0.2070-0.3
O 3 3=-0.6080-1.2
O 3 4=-0.1210-1.3
NON-ZERO EIGENVALUES OF MATRIX A MAT-SUB-3
REAL PART      IMAGINARY PART
-----
-0.5290-0.1
-0.5610-0.3
THE K MATRIX IS
O 000296615
-0.000000000
1.000000000
1.000003002
THE V MATRIX IS
O 000000000
-41.050765636
3.653707123
-0.180677200
D-CUR-I= 4
O 4 1=-0.5850-0.1
O 4 2=-0.2070-0.3
O 4 3=-0.6080-1.2
O 4 4=-0.1210-1.3
NON-ZERO EIGENVALUES OF MATRIX A MAT-SUB-4
REAL PART      IMAGINARY PART
-----
-0.5290-0.1
-0.5610-0.3
THE K MATRIX IS
O 000296615
-0.000000000
1.000000000
1.000003002
THE V MATRIX IS
O 000000000
-41.050765636
3.653707123
-0.180677200

```

ANNEXE 2

COURBES UNIVERSELLES PERMETTANT DE CHOISIR LE TEMPS DE REPONSE ET LE DEPASSEMENT INDICIELS

Nous avons résumé sous forme de tableau les transmittances et les réponses indicielles correspondantes, pour des systèmes d'ordre inférieur ou égal à quatre. Celles-ci ont été par ailleurs tracées graphiquement en faisant intervenir le temps réduit $\tau = q^{1/n} t$ où n est l'ordre du système considéré, et en faisant varier l'amortissement avec un pas de 0,1. Dans le cas, du quatrième ordre, le nombre des courbes étant élevé, nous n'avons rapporté ici que les réponses les plus caractéristiques.

Transmittance	Configuration des pôles	Réponse indicielle
$\frac{q}{s+q}$		$y(t) = 1 - e^{-qt}$
$\frac{q}{s^2 + 2\zeta q s + q^2}$		$y(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta q^{1/2} t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(q^{1/2} \sqrt{1-\zeta^2} y + \psi)$ $\tan \psi = \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$

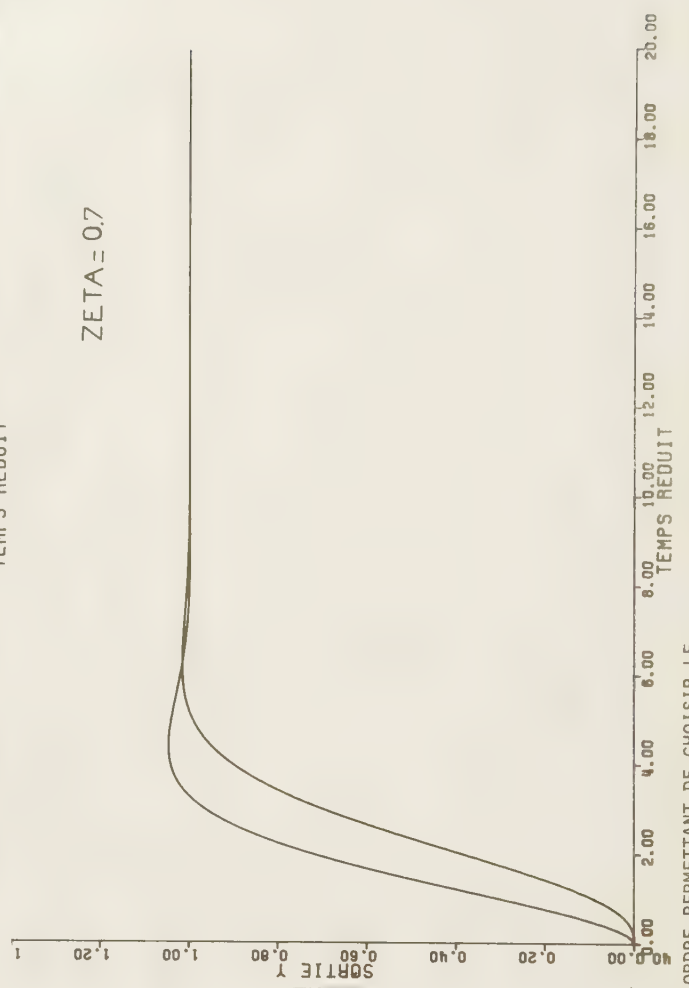
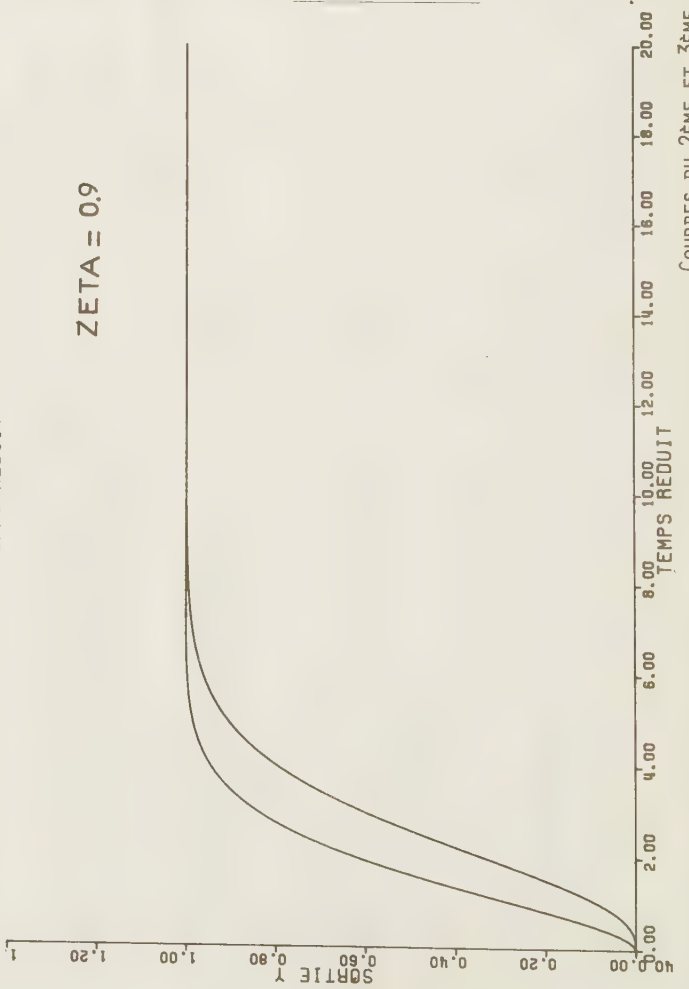
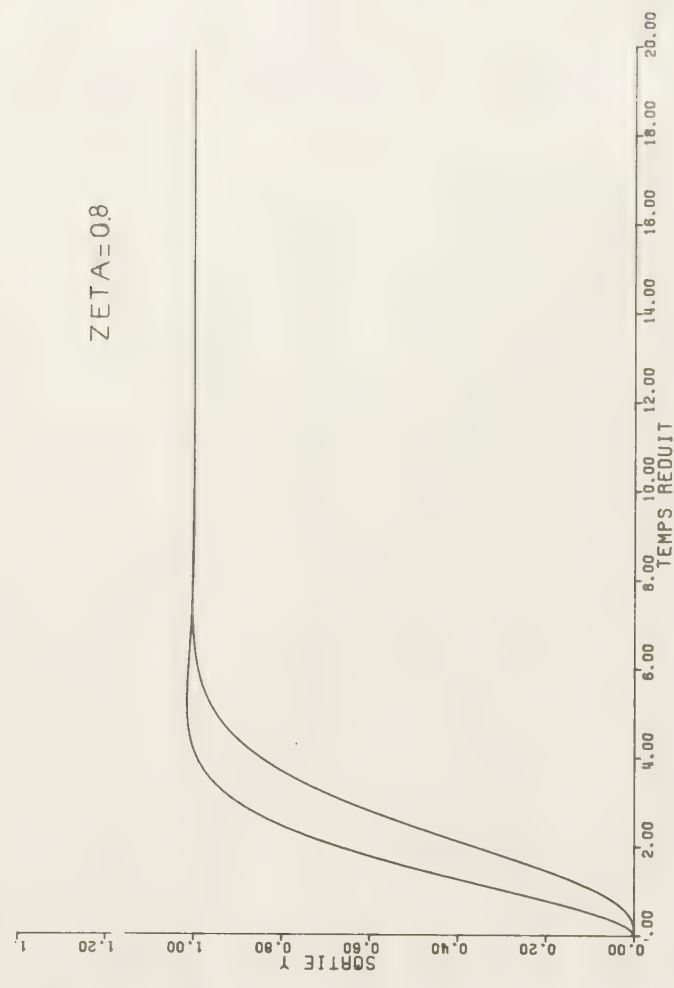
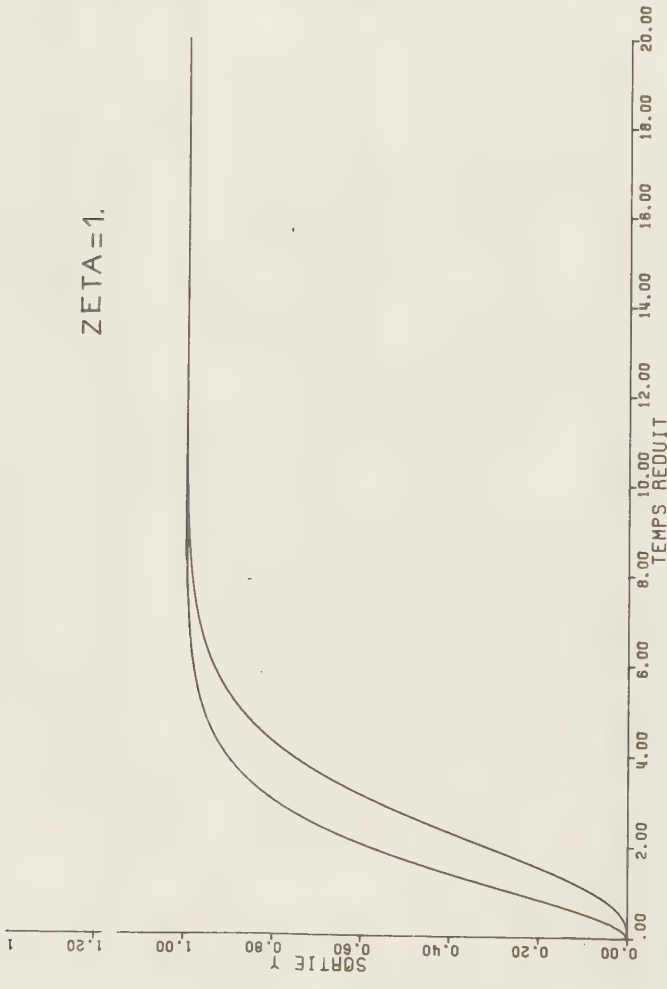
Systèmes du 1^{er} et du 2^{ème} ordre

Transmittance	Configuration des pôles	Réponse indicielle
$\frac{q^{1/3}}{(s+q^{1/3})^3}$		$y(t) = 1 - \frac{q^{2/3}}{2} t^2 + q^{1/3} t + 1)e^{-q^{1/3} t}$
$\frac{q^{1/3}}{(s+q^{1/3})^2 (s^2 + 2q^{1/3} \zeta s + q^{2/3})}$		$y(t) = 1 - \frac{q^{1/3}}{2(1-\zeta)} e^{-\zeta q^{1/3} t} \sin(q^{1/3} \sqrt{1-\zeta^2} t)$ $\psi = \text{Arctg} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} + \text{Arctg} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta-1}$

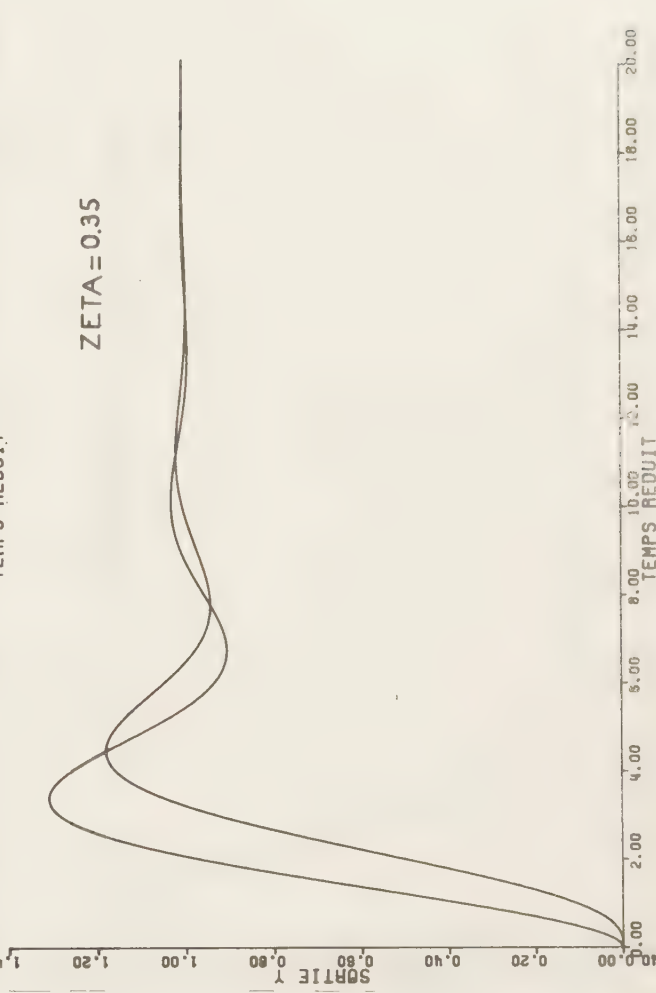
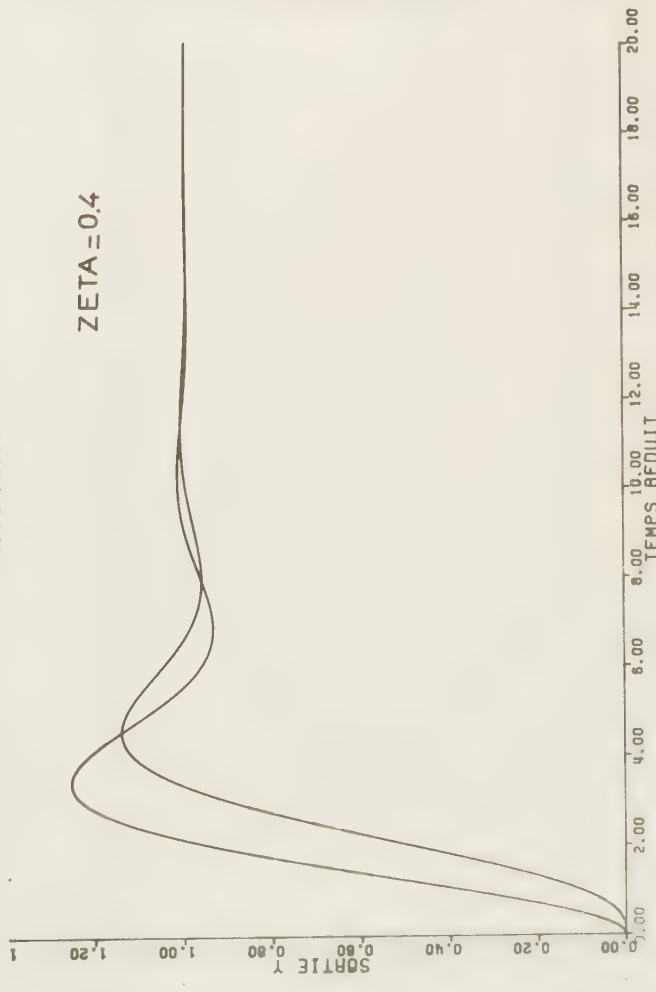
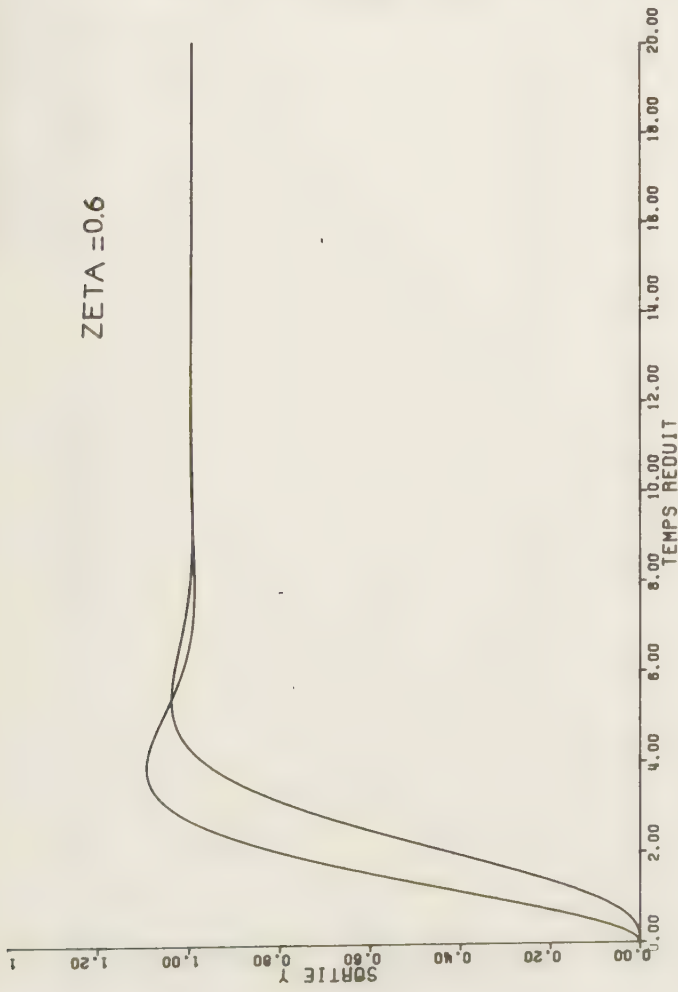
Système du 3^e ordre

Transmittance	Configuration des pôles	Réponse indicielle
$\frac{q}{(s+q)^{1/4}}$		$y(t) = 1 - \frac{q^{3/4}}{6} t^3 + \frac{q^{2/4}}{2} t^2 + q^{1/4} t - q^{1/4} e^{-q^{1/4} t}$
$\frac{q}{(s+q)^2 (s^2 + 2q^{1/4} \zeta s + q^{2/4})}$		$y(t) = 1 - \frac{q^{1/4} t e^{-q^{1/4} t}}{2(1-\zeta)} + \frac{e^{-q^{1/4} t} \sin(q^{1/4} \sqrt{1-\zeta^2} t - \psi)}{2(1-\zeta) \sqrt{1-\zeta^2}} - \frac{q^{1/4} t}{1-\zeta}$ $\psi = 2 \operatorname{Arctg} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{1-\zeta} + \operatorname{Arctg} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{-\zeta}$
$\frac{q}{(s^2 + 2\zeta_1 q^{1/4} s + q^{2/4}) (s^2 + 2\zeta_2 q^{1/4} s + q^{2/4})}$		$y(t) = 1 + \frac{e^{-\zeta_1 q^{1/4} t} \sin(q^{1/4} \sqrt{1-\zeta_1^2} t - \psi_1)}{2\sqrt{1-\zeta_1^2} (\zeta_2 - \zeta_1)} - \frac{e^{-\zeta_2 q^{1/4} t} \sin(q^{1/4} \sqrt{1-\zeta_2^2} t - \psi_2)}{2\sqrt{1-\zeta_2^2} (\zeta_2 - \zeta_1)} + \frac{q^{1/4} t \sin(q^{1/4} \sqrt{1-\zeta_2^2} t - \psi_2)}{e^{-\zeta_2 q^{1/4} t} \sin(q^{1/4} \sqrt{1-\zeta_2^2} t - \psi_2)}$ $\psi_1 = 2 \operatorname{Arctg} \frac{\sqrt{1-\zeta_1^2}}{-\zeta_1} - \operatorname{Arctg} \frac{\sqrt{1-\zeta_2^2}}{-\zeta_2} \quad \psi_2 = 2 \operatorname{Arctg} \frac{\sqrt{1-\zeta_2^2}}{-\zeta_2} - \operatorname{Arctg} \frac{\sqrt{1-\zeta_1^2}}{-\zeta_1}$
$\frac{q}{(s^2 + 2\zeta q^{1/4} s + q^{2/4}) (s^2 + 2\zeta_2 q^{1/4} s + q^{2/4})}$		$y(t) = 1 - \frac{q^{1/4} t}{2(1-\zeta^2)} e^{-\zeta q^{1/4} t} \cos(q^{1/4} \sqrt{1-\zeta^2} t - \psi_1) - \frac{(4-3\zeta^2)^{1/2}}{2(1-\zeta^2)} e^{-\zeta q^{1/4} t} \sin(q^{1/4} \sqrt{1-\zeta^2} t - \psi_2)$ $\psi_1 = \operatorname{Arctg} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{-\zeta} \quad \psi_2 = 2 \operatorname{Arctg} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{-\zeta} + \operatorname{Arctg} \frac{2\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}$

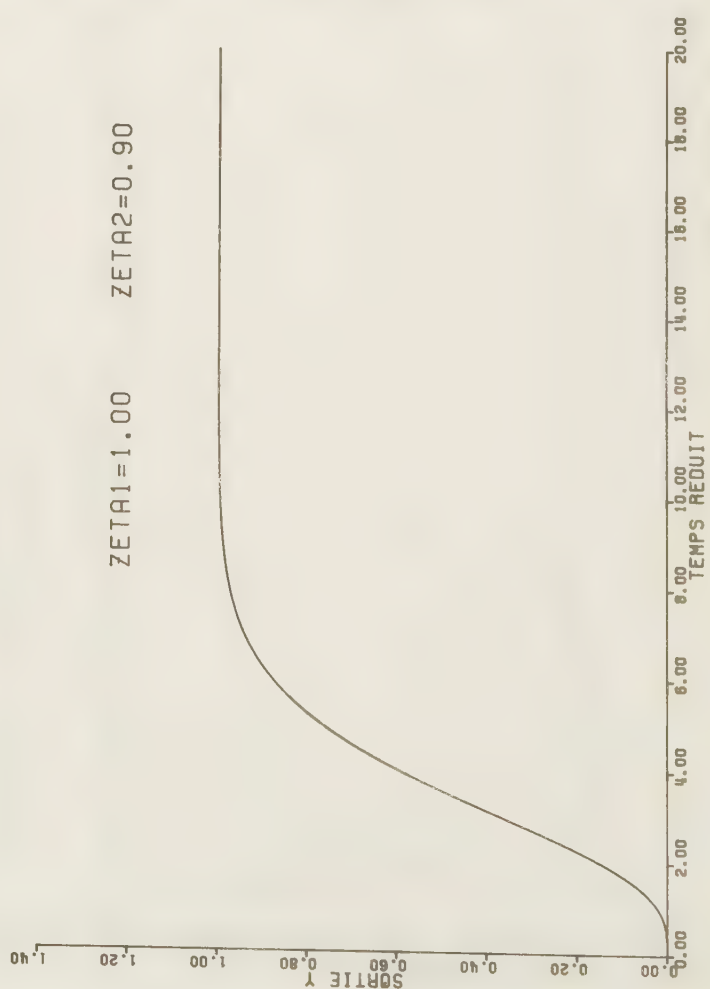
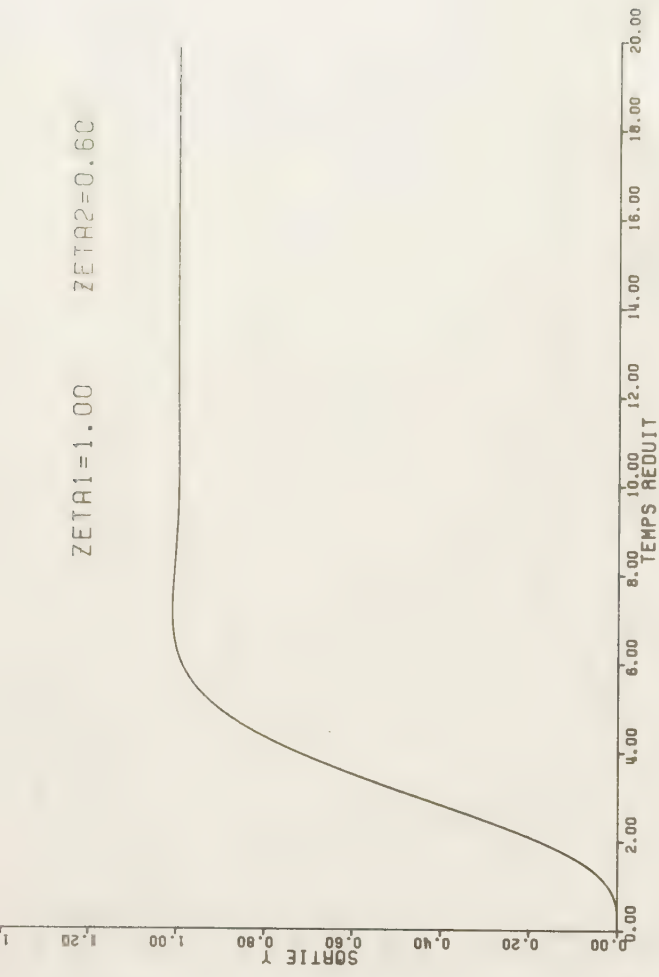
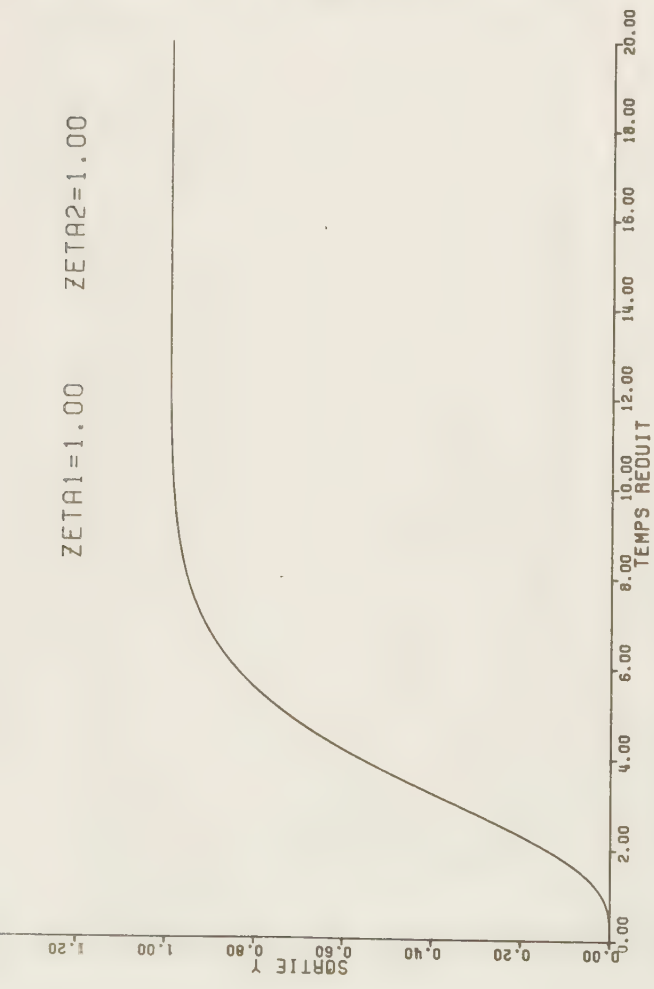
Système du 4^{ème} ordre



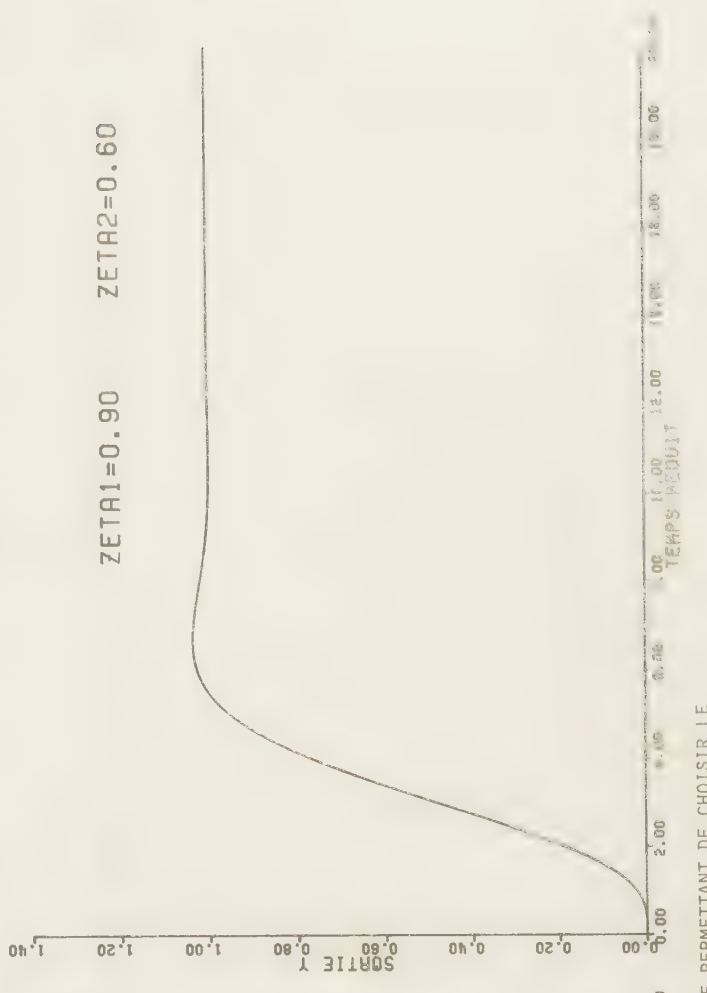
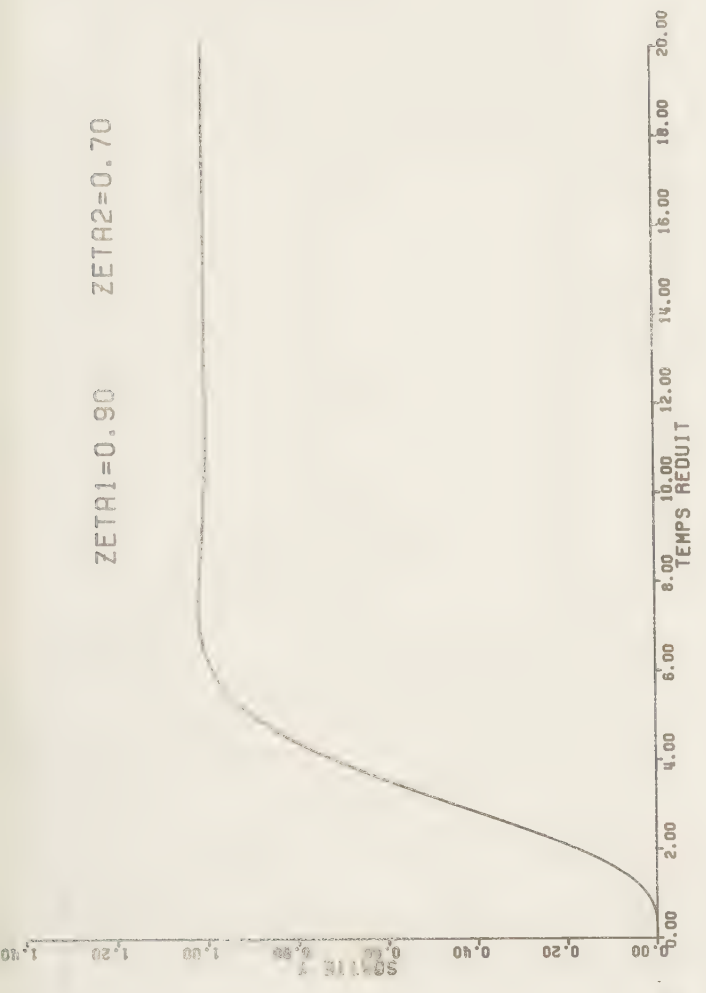
COURBES DU 2ÈME ET 3ÈME ORDRE PERMETTANT DE CHOISIR LE
TEMPS DE RÉPONSE EN FONCTION DE L'AMORTISSEMENT



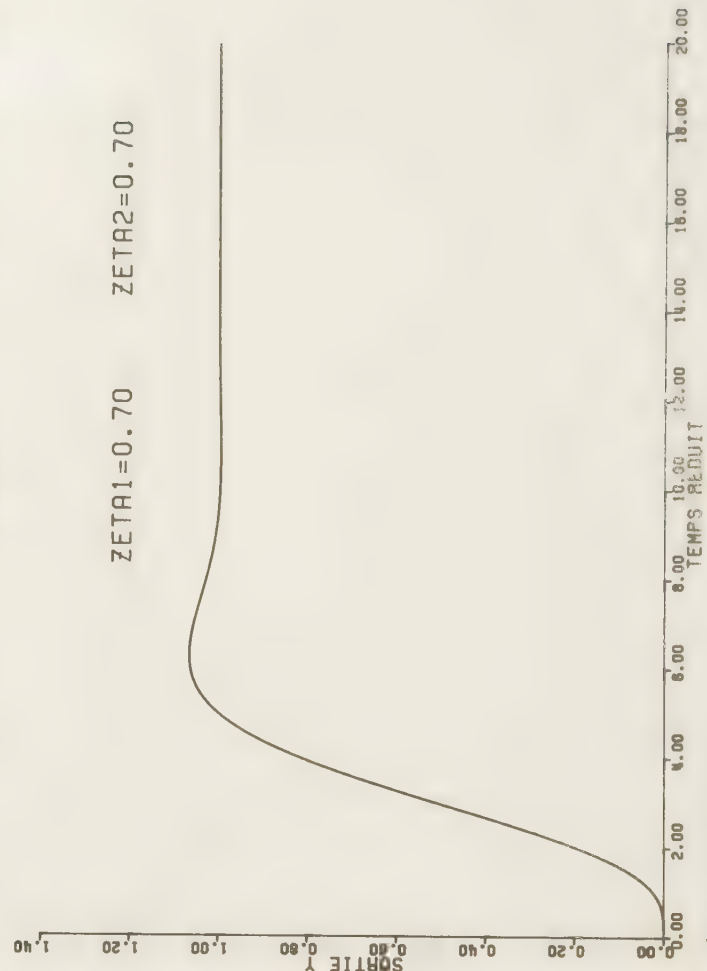
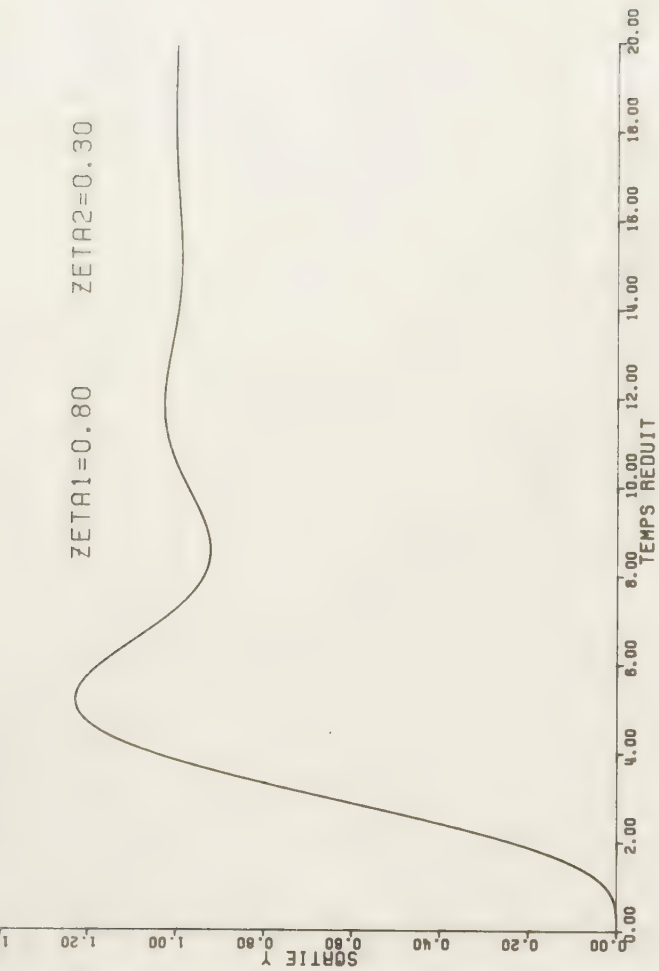
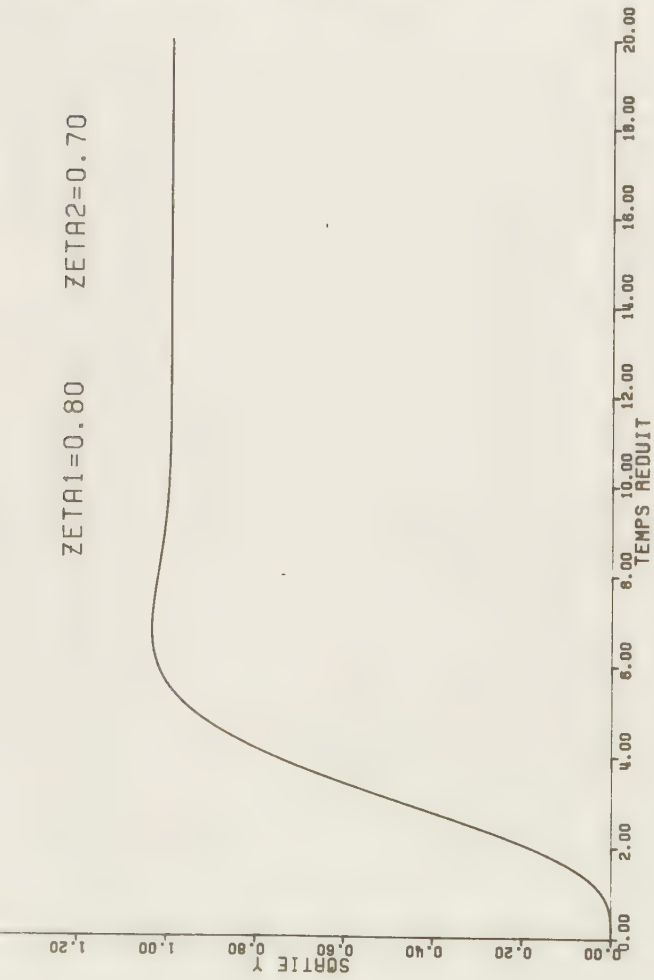
COURBES DU 2ÈME ET 3ÈME ORDRE PERMETTANT DE CHOISIR LE
TEMPS DE RÉPONSE EN FONCTION DE L'AMORTISSEMENT



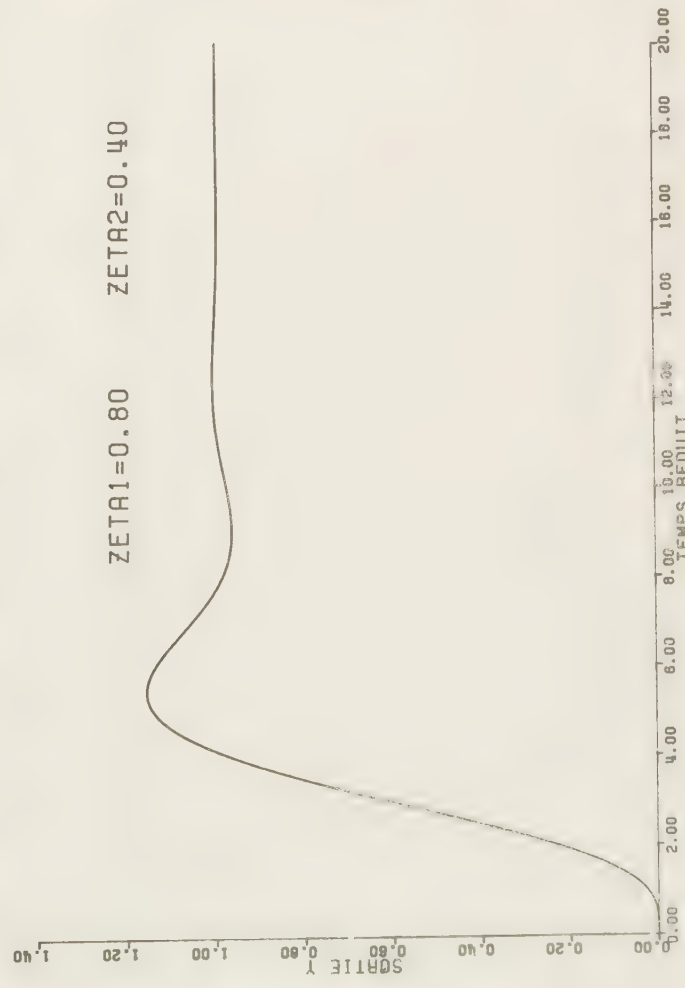
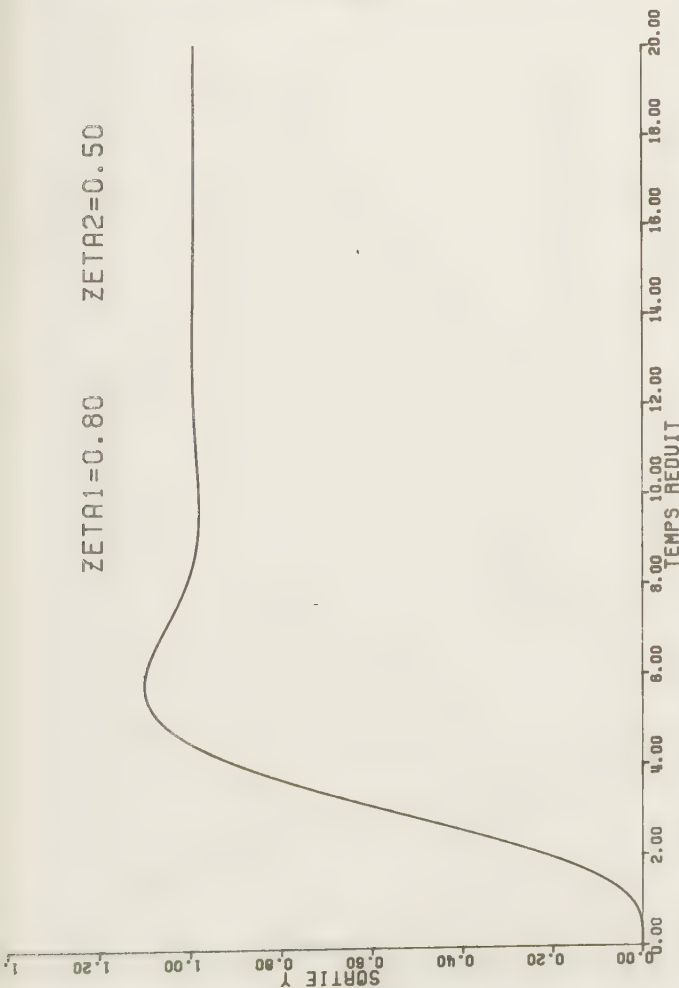
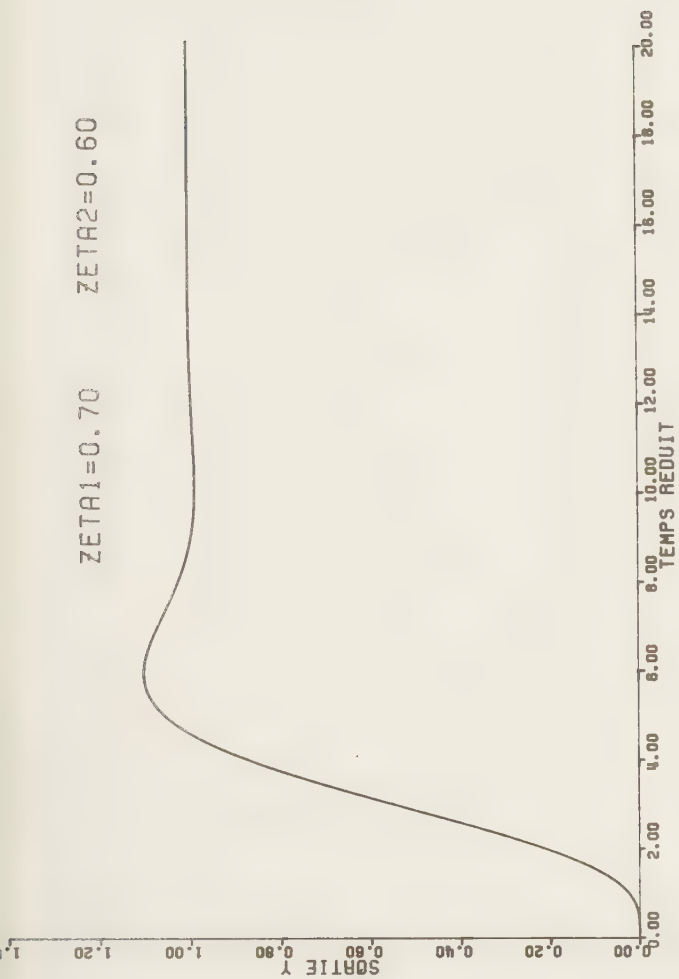
COURBES DU 4^{ème} ORDRE PERMETTANT DE CHOISIR LE
TEMPS DE RÉPONSE EN FONCTION DE L'AMORTISSEMENT



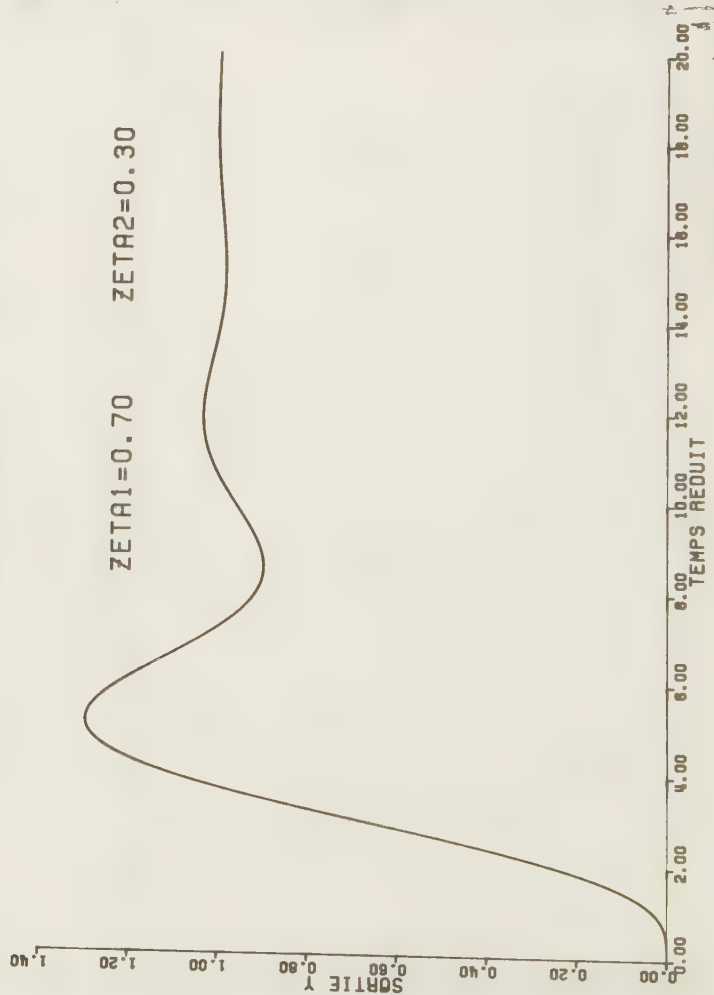
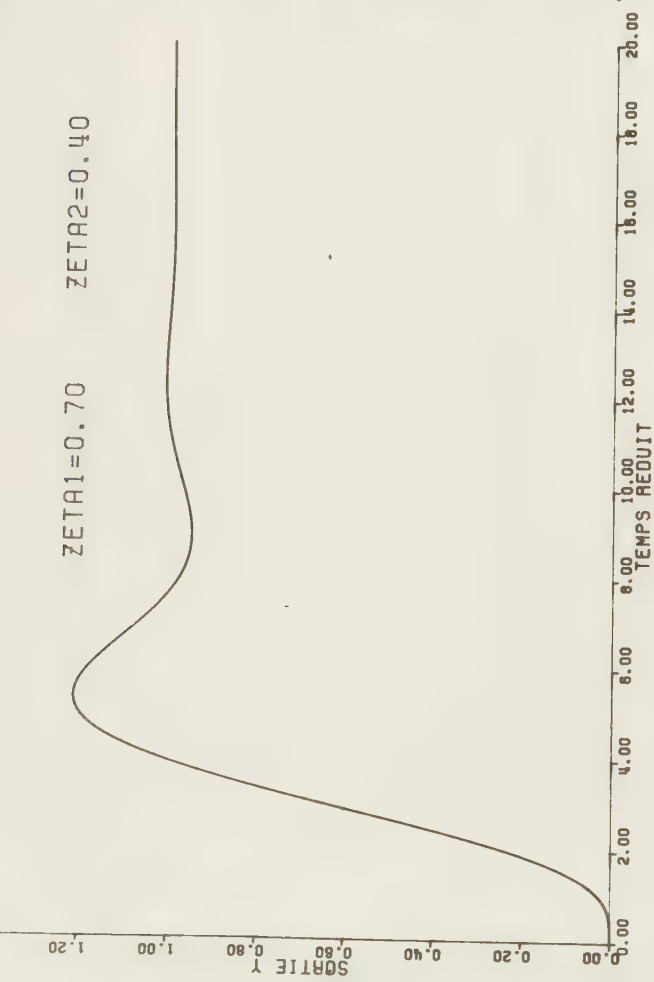
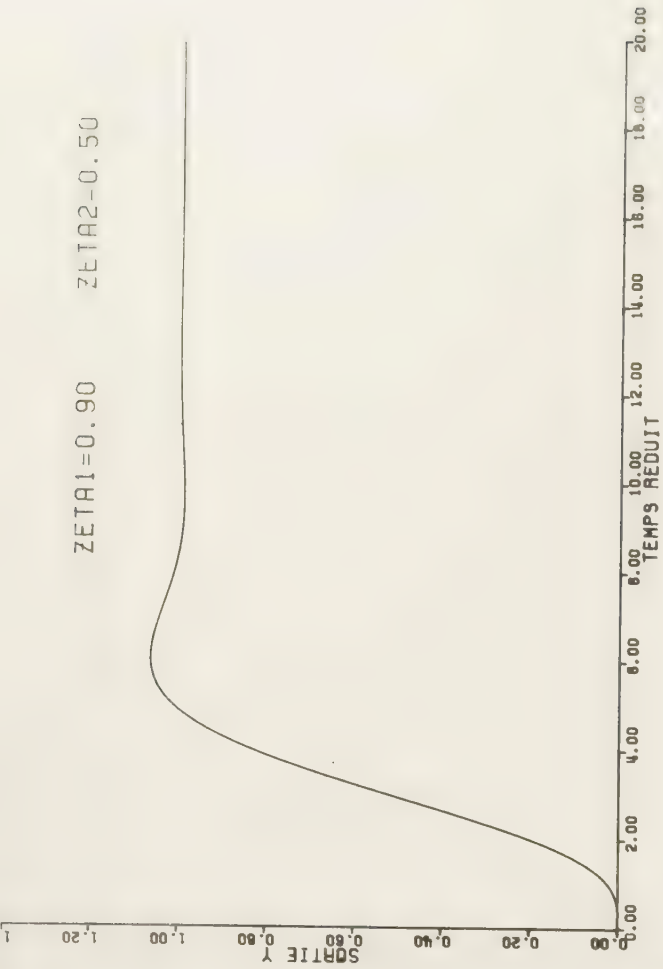
COURBES DU 4^{ème} ORDRE PERMETTANT DE CHOISIR LE
MEILLEUR COMPROMIS EN FONCTION DE L'AMORTISSEMENT



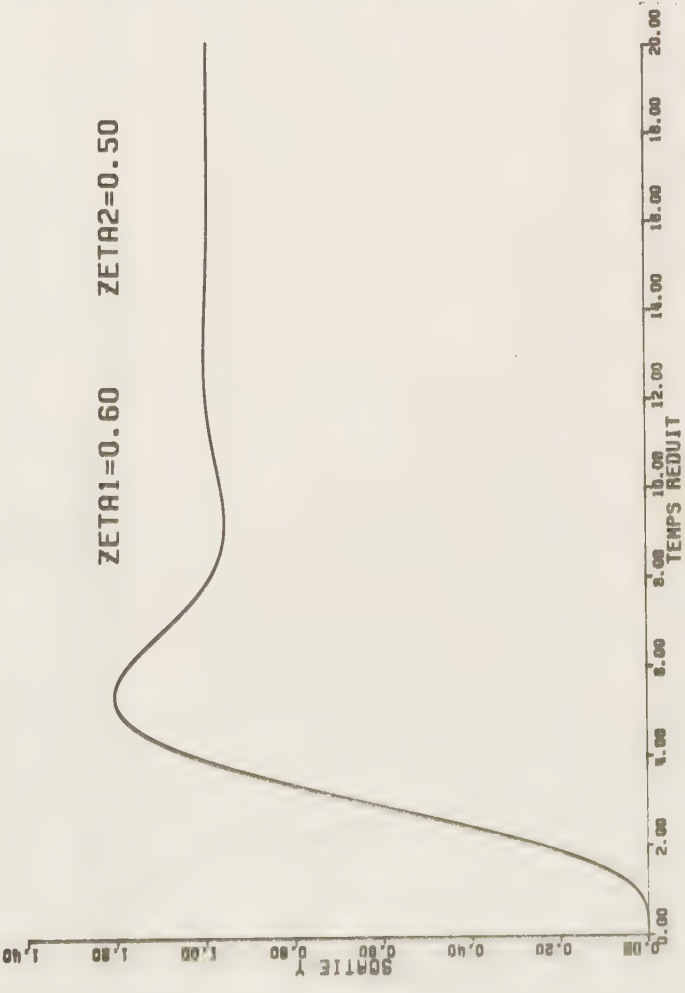
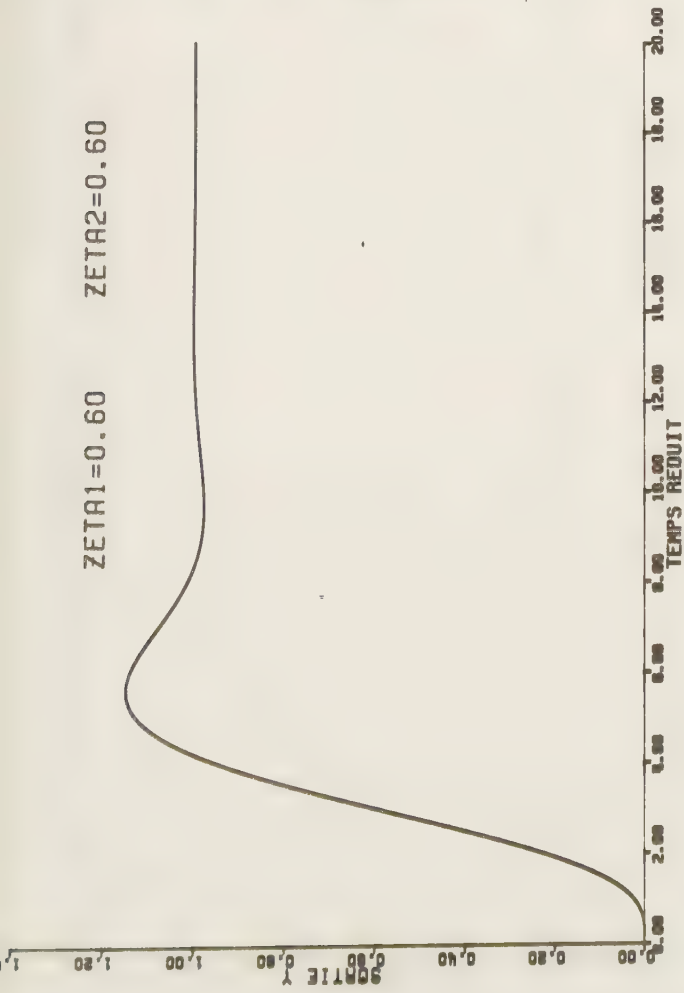
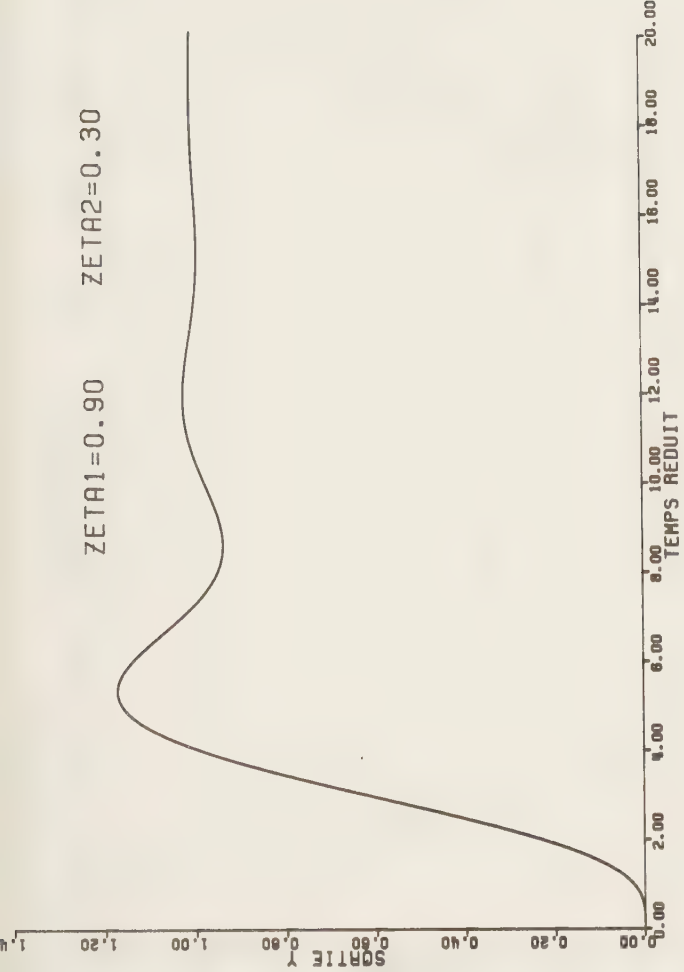
COURBES DU 4ÈME ORDRE PERMETTANT DE CHOISIR LE
TEMPS DE RÉPONSE EN FONCTION DE L'AMORTISSEMENT



COURBES DU 4^{ème} ORDRE PERMETTANT DE CHOISIR LE
TEMPS DE RÉPONSE EN FONCTION DE L'AMORTISSEMENT

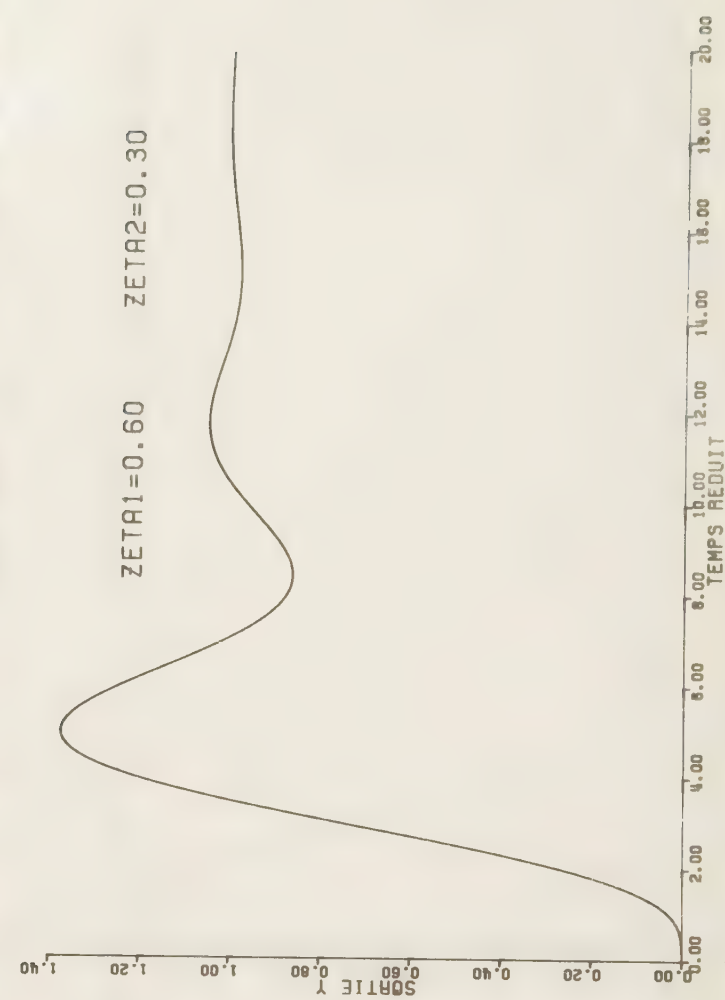
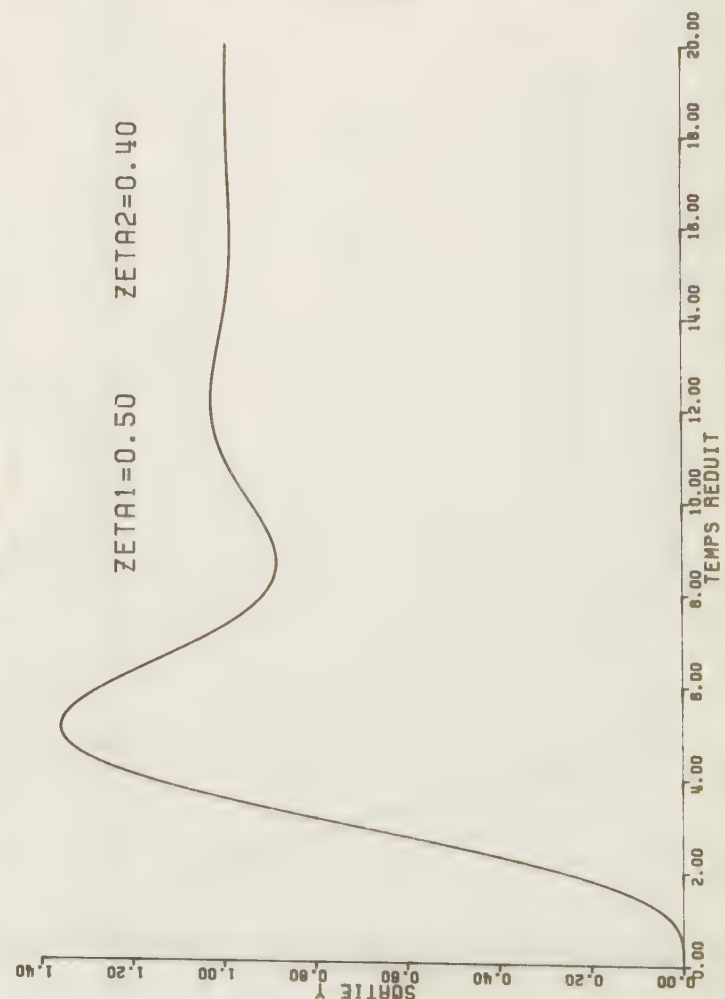
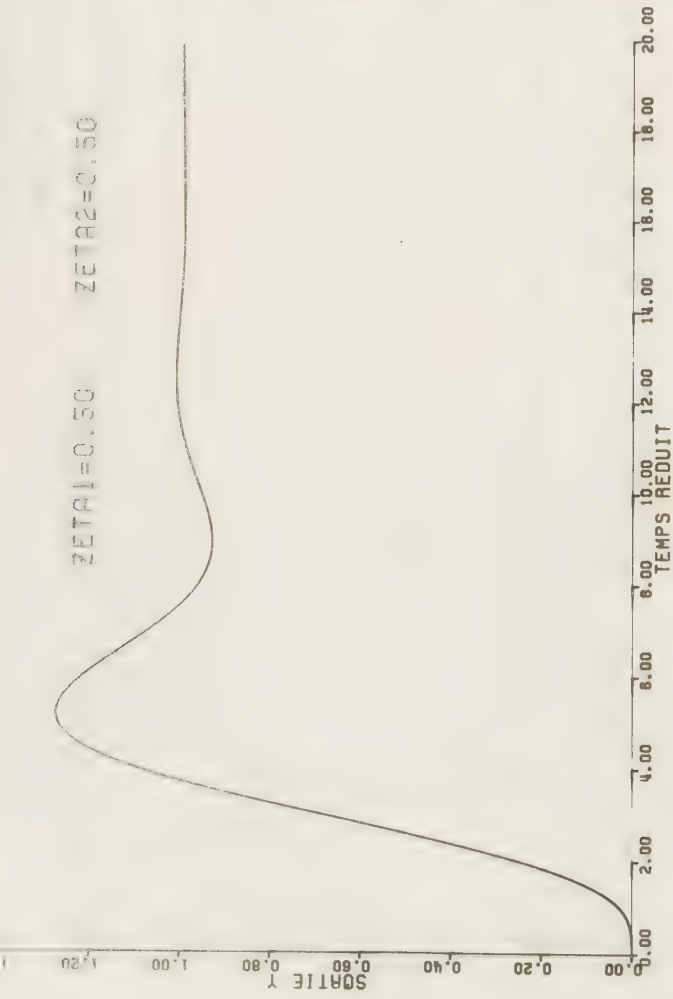


COURBES DU 4^{ÈME} ORDRE PERMETTANT DE CHOISIR LE
TEMPS DE RÉPONSE EN FONCTION DE L'AMORTISSEMENT



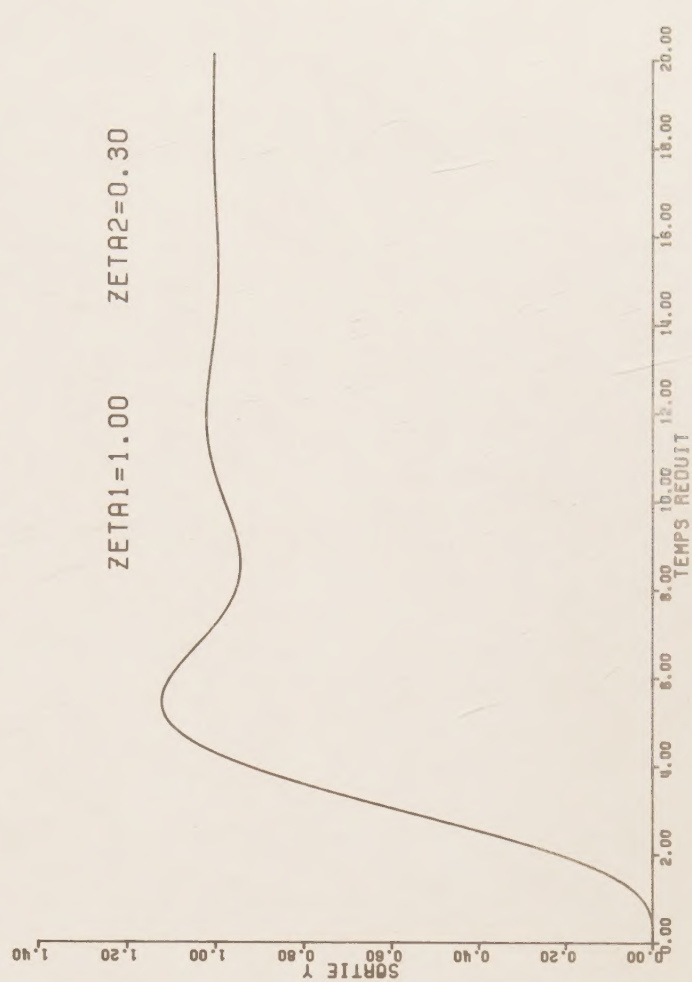
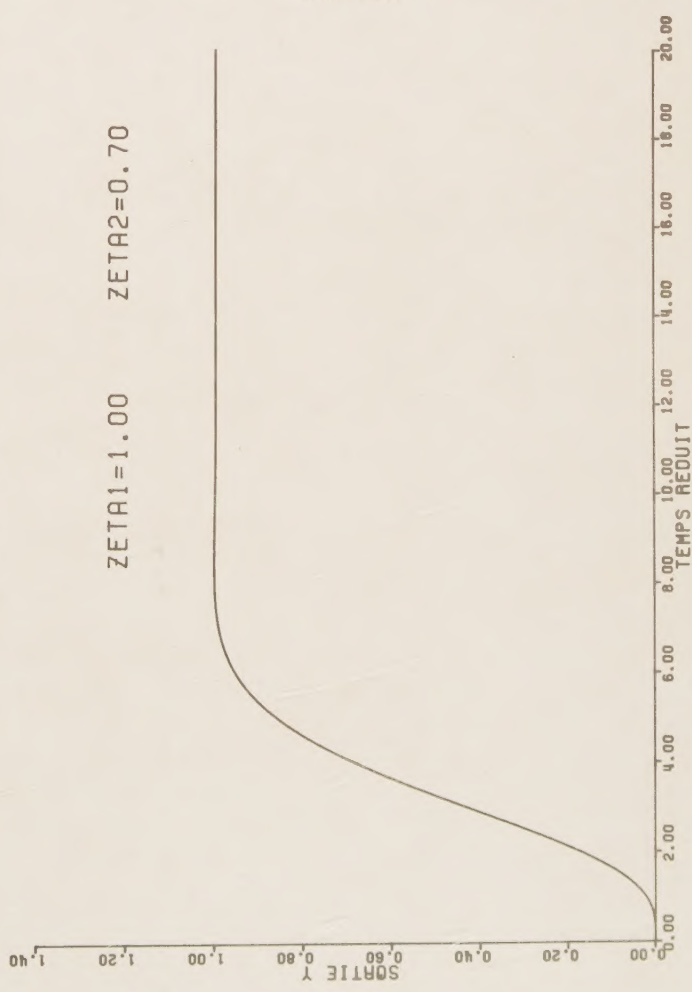
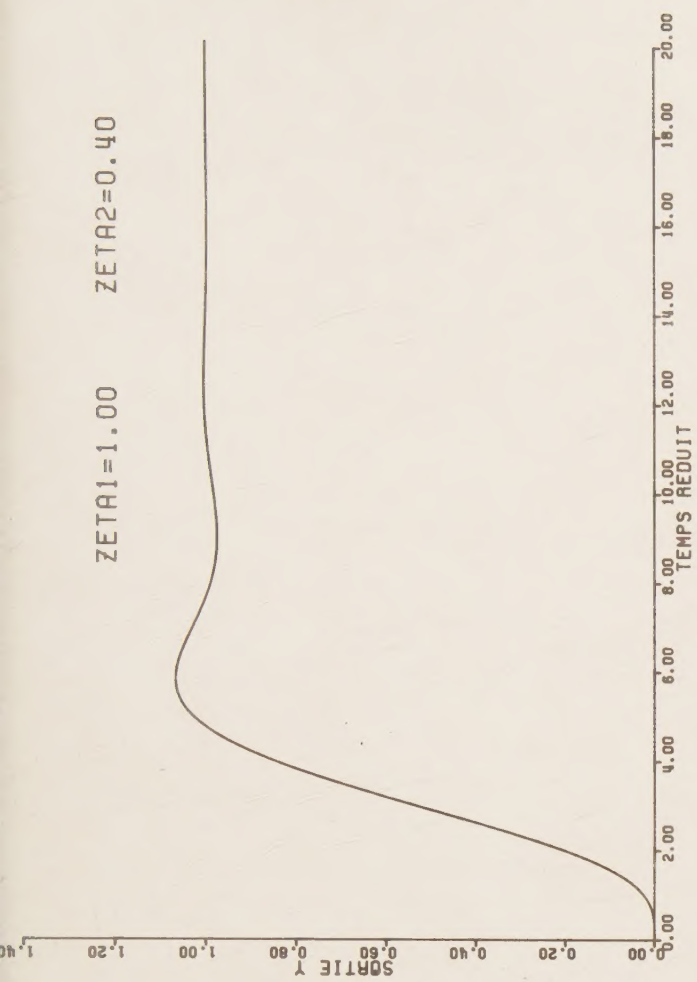
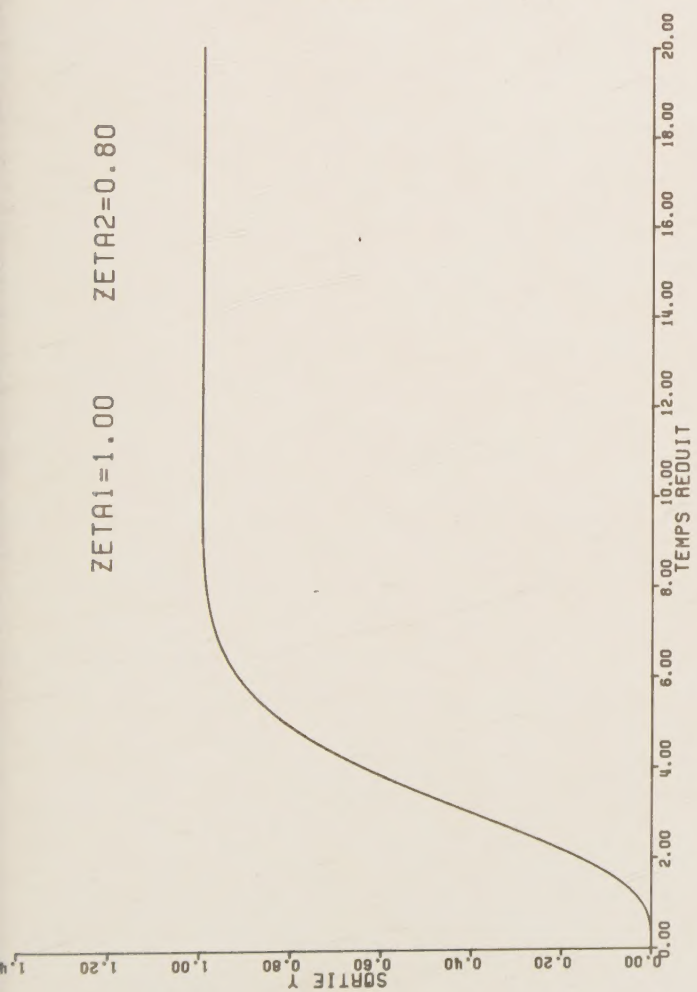
COURBES DU 4^{ème} ORDRE PERMETTANT DE CHOISIR LE

TEMPS DE RÉPONSE EN FONCTION DE L'AMORTISSEMENT



COURBES DU 4ÈME ORDRE PERMETTANT DE CHOISIR LE

TEMPS DE RÉPONSE EN FONCTION DE L'AMORTISSEMENT



COURBES DU 4ÈME ORDRE PERMETTANT DE CHOISIR LE

TEMPS DE RÉSONANCE EN FONCTION DE L'AMORTISSEMENT

